V МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА имени ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА
Региональный этап

26 января 2013 г.

---

8 класс.

Первый день.

1. Каждый из 10 гномов — либо рыцарь, всегда говорящий правду, либо лжец, который всегда врёт, причём хотя бы один из гномов — рыцарь. Все гномы выстроились в шеренгу, после чего девятеро сказали: «Среди стоящих слева от меня есть рыцарь», а оставшийся, Глоин, сказал: «Среди стоящих справа от меня есть рыцарь». Правду сказал Глоин или солгал?

2. На пути в музей группа детсадовцев построилась парами, причём количество пар из двух мальчиков было в три раза больше количества пар из двух девочек. На обратном пути та же группа построилась так, что количество пар из двух мальчиков было в четыре раза больше количества пар из двух девочек. Докажите, что эту же группу можно построить так, чтобы количество пар из двух мальчиков было в семь раз больше количества пар из двух девочек.

3. На отрезке AB отмечена точка M. Точки P и Q — середины отрезков AM и BM соответственно, точка O — середина отрезка PQ. Выберем точку C так, чтобы угол ACB был прямым. Пусть MD и ME — перпендикуляры, опущенные из точки M на прямые CA и CB, а F — середина отрезка DE. Докажите, что длина отрезка OF не зависит от выбора точки C.

4. Существуют ли шесть различных натуральных чисел a, b, c, d, e, f таких, что справедливо равенство

$$(a+b+c+d+e+f):(1/a+1/b+1/c+1/d+1/e+1/f) = 2012?$$

V МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА имени ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

Региональный этап

27 января 2013 г.

---

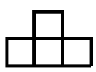
8 класс.

Второй день.

5. У Синдбада в кошельке 11 внешне одинаковых динаров, среди которых, возможно, один фальшивый, отличающийся от настоящего по весу, но неизвестно в какую сторону. Как ему расплатиться с торговцем восемью настоящими динарами, если торговец разрешил два раза воспользоваться его чашечными весами, но без гирь?

6. Дан остроугольный треугольник ABC. Высота AA_1 продолжена за вершину A на отрезок $AA_2 = BC$. Высота CC_1 продолжена за вершину C на отрезок $CC_2 = AB$. Найдите углы треугольника A_2BC_2.

7. Пусть a, b, c — три натуральных числа. На доску выписали три произведения ab, ac, bc, и у каждого из них стёрли все цифры, кроме двух последних. Могло ли случиться, что в результате получились три последовательных двузначных числа?

8. В клетках доски 8×8 расставлены числа 1 и –1 (в каждой клетке — по одному числу). Рассмотрим всевозможные расположения четырёхклеточной фигурки  на доске (фигурку можно поворачивать, но её клетки не должны выходить за пределы доски). Назовём такое расположение *неудачным*, если сумма чисел, стоящих в четырёх клетках фигурки, не равна 0. Найдите наименьшее возможное число неудачных расположений.