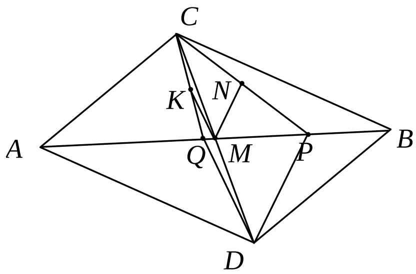
VI олимпиада имени Леонарда Эйлера, заключительный этап

Решения заданий первого дня.

1. *Докажите, что в разложение произведения десяти последовательных трёхзначных чисел на простые множители входит не больше 23 различных простых чисел.* (И. Рубанов)

Решение. Заметим, что в разложение трёхзначного числа на простые множители входит не более двух множителей, больших 10 — иначе произведение будет больше 1000. Кроме того, среди 10 последовательных натуральных чисел есть число, делящееся на 10, в разложение которого входит максимум один множитель, больший 10. Таким образом, в разложения десяти последовательных трёхзначных чисел входит не больше 19 простых множителей, больших 10. Вместе с множителями 2, 3, 5, 7 получается не больше 23 различных простых множителей, что и требовалось доказать.



2. *На стороне AB треугольника ABC с углом в 100° при вершине C взяты точки P и Q такие, что AP = BC и BQ = AC. Пусть M, N, K — середины отрезков AB, CP, CQ соответственно. Найдите угол NMK.* (М. Кунгожин + жюри)

Ответ. 40°. **Решение**. Достроим треугольник до параллелограмма $ACBD$. Тогда M является серединой отрезка CD. Так как $AP = BC = AD$ и $BQ = AC = BD$, треугольники APD и BQD — равнобедренные. Поэтому

$$\angle QDP = \angle ADP+\angle BDQ-\angle ADB° = (90°-\angle DAB/2)+(90°-\angle DBA/2)-100° = 80°-(\angle DAB+\angle DBA)/2 = 40°.$$

Осталось заметить, что $\angle QDP = \angle KMN$, так как MK и MN — средние линии треугольников DQC и DPC соответственно.

3. *На сотом году правления Казначей Бессмертный решил начать выпускать новые монеты. В этом году он выпустил в обращение неограниченный запас монет достоинством $2^{100}-1$, на следующий год — достоинством $2^{101}-1$, и т.д. Как только достоинство очередной новой монеты можно будет без сдачи набрать выпущенными ранее новыми монетами, Казначея сместят. На каком году его правления это случится?* (И. Богданов)

Ответ. На двухсотом. **Решение**. Пусть на k-ом году правления 2^k-1 можно набрать выпущенными ранее монетами: $2^k-1 = a_1+\ldots+a_n = N-n$, где N — сумма степеней двойки, каждое из слагаемых в которой делится на 2^{100}. Так как 2^k тоже делится на 2^{100}, на 2^{100} должно делиться и число $n-1$. Так как, очевидно, $n > 1$, получаем $n \geq 2^{100}+1$, откуда $2^k-1 \geq (2^{100}-1)(2^{100}+1) \geq 2^{200}-1$, то есть $k \geq 200$, и раньше 200-го года Казначея не сместят. А на 200-ом году сместят, так как $2^{200}-1 = (2^{100}+1)(2^{100}-1)$.

4. *Среди 49 одинаковых на вид монет — 25 настоящих и 24 фальшивых. Для определения фальшивых монет имеется тестер. В него можно положить любое количество монет, и если среди этих монет больше половины — фальшивые, тестер подает сигнал. Как за пять тестов найти две фальшивых монеты?* (К. Кноп)

Решение. Назовём «рабочими» те монеты, среди которых мы продолжаем искать пару фальшивых. Ситуацию «*рабочими являются N монет, среди которых не менее M фальшивых*» будем обозначать N:M. Если на очередном тесте был сигнал (обозначим это "+"), то после этого мы считаем рабочими те и только те рабочие монеты, которые в тесте участвовали, а если сигнала не было («–), то продолжим считать рабочими те и только те рабочие монеты, которые в этом тесте не участвовали. Вначале имеем ситуацию 49:24. Приведём возможный алгоритм решения задачи.

Тест 1: тестируем 27 монет. +: ситуация 27:14, –: ситуация 22:11. Тест 2 для ситуации 27:14: тестируем 16 монет. +: ситуация 16:9, –: ситуация 11:6. Тест 2 для ситуации 22:11: тестируем 16 монет. При обоих вариантах — ситуация 11:6.

Тест 3 для ситуации 16:9: тестируем 8 монет. При обоих вариантах — ситуация 8:5. Тест 4 для ситуации 8:5: тестируем 4 монеты. При обоих вариантах — ситуация 4:3. Тест 5 для ситуации 4:3: тестируем две монеты. При обоих вариантах — ситуация 2:2, то есть мы нашли пару фальшивых.

Тест 3 для ситуации 11:6: тестируем 8 монет. +: ситуация 8:5, тесты 4 и 5 для которой указаны выше; –: ситуация 3:2. Тесты 4 и 5 для ситуации 3:2 — тестируем дважды по одной монете. Либо обе они окажутся фальшивыми («+»), либо одна будет настоящей («–»), тогда другой фальшивой монетой будет третья из оставшихся.

VI олимпиада имени Леонарда Эйлера, заключительный этап

Решения заданий второго дня.

5. *Петя и Вася одновременно ввели в свои калькуляторы одно и то же не равное 0 целое число. После этого каждую минуту Петя либо прибавлял к своему числу 10, либо умножал его на 2014; одновременно Вася в первом случае вычитал из своего числа 10, а во втором — делил его на 2014. Могло ли оказаться, что через некоторое время числа у Пети и Васи снова стали равными?* (И. Богданов)

Ответ. Да, так могло оказаться. **Решение**. Допустим, последним действием перед тем, как числа снова стали равными, Петя умножал на 2014, а Вася делил. Тогда перед этим Петино и Васино числа были отрицательными, и модуль Васиного числа было в 2014^2 раз больше модуля Петиного. Пусть эти два числа были получены из одного и того же исходного числа n повторенной k раз операцией «Петя прибавляет 10, Вася вычитает 10». Это означает, что $n-10k = 2014^2(n+10k)$ • $10\cdot(2014^2+1)k = (1-2014^2)n$. Полагая, например, $n = -10\cdot(2014^2+1)$, получаем, что, начав с такого числа n, Петя и Вася могли снова уравнять свои числа, совершив сначала 2014^2-1 операций «Петя прибавляет 10, Вася вычитает 10», а потом одну операцию «Петя умножает на 2014, Вася делит на 2014». **Замечание**. Есть и другие решения.

6. *Назовём натуральное число **гористым**, если в его записи есть не стоящая с краю цифра (называемая **вершиной**), которая больше всех остальных, а все остальные цифры ненулевые и сначала нестрого возрастают (то есть каждая следующая цифра больше предыдущей или равна ей) до вершины, а потом нестрого убывают (то есть каждая следующая цифра меньше предыдущей или равна ей). Например, число 12243 — гористое, а числа 3456 и 1312 — нет. Докажите, что сумма всех стозначных гористых чисел — составное число.* (С. Берлов)

Решение. Назовем два гористых числа *дружественными*, если каждое из них получается из другого записью его цифр в обратном порядке. Заметим, что цифры, которые у одного из дружественных чисел стоят в четных разрядах, у другого стоят в нечетных разрядах. В частности, два дружественных числа не могут совпадать, так как их вершины находится в разрядах разной четности. Поэтому все гористые числа разбиваются на пары дружественных. Далее, если разность суммы цифр, стоящих в нечетных (с конца) разрядах, и суммы цифр, стоящих в четных разрядах, у одного из двух дружественных чисел равна a, то у другого она равна $-a$. Так как эти разности при делении на 11 дают те же остатки, что и сами дружественные числа, сумма двух дружественных чисел делится на 11. Следовательно, на 11 делится и сумма всех гористых чисел. Поскольку она при этом, очевидно, больше 11, она является составным числом.

7. *Десятичная запись натурального числа N составлена только из единиц и двоек. Известно, что вычёркиванием цифр из этого числа можно получить любое из 10000 чисел, состоящих из 9999 единиц и одной двойки. Найдите наименьшее возможное количество цифр в записи числа N.* (Г. Челноков)

Ответ. 10198. **Решение**. Пример. Число 1…121…12…21…121…1, где 100 двоек, спереди и сзади — по 99 единиц, а между соседними двойками — по 100 единиц. Число из 9999 единиц и двойки, где перед двойкой идет $100m+n$ единиц ($0 \le m,n \le 99$) получается вычеркиванием всех двоек, кроме $(m+1)$-ой, $99-n$ единиц перед ней и n единиц за ней. Оценка. Заметим, что в числе N нет двух двоек, идущих подряд — иначе его можно укоротить, вычеркнув одну из этих двоек. Пусть в числе N k двоек, перед первой двойкой идут a_0 единиц, между первой и второй — a_1 единиц, …, после последней двойки — a_k единиц. Положим $s = a_0+\ldots+a_k$. Для получения числа, у которого перед двойкой одна единица, нам придется вычеркнуть не меньше a_0-1 единиц. Поэтому число $s-(a_0-1)$ должно быть не меньше 9999, то есть $s-a_0 \ge 9998$. Для получения числа, у которого перед двойкой a_0+1 единица, придется вычеркнуть первую двойку и не меньше a_1-1 единиц, откуда получаем неравенство $s-a_1 \ge 9998$. Для получения числа, у которого перед двойкой a_0+a_1+1 единица, придется вычеркнуть две первых двойки и не меньше a_2-1 единиц, откуда получаем неравенство $s-a_2 \ge 9998$. Рассуждая аналогично, получаем, что неравенство $s-a_i \ge 9998$ выполнено при всех i от 0 до $k-1$; кроме того, для получения числа, где двойка идет последней, требуется, чтобы $s-a_k \ge 9999$. Складывая все эти неравенства, получаем неравенство $(k+1)s-s \ge 9998(k+1)+1 \Rightarrow ks > 9998(k+1) \Rightarrow$

$s > 9998+9998/k$. Так как в искомом числе ещё и k двоек, количество цифр в нем больше, чем $9998+9998/k+k \geq 9998+2\sqrt{9998} > 10197$, что и требовалось доказать.

8. *Диагональ выпуклого 101-угольника будем называть* ***главной****, если по одну сторону от неё лежит 50, а по другую — 49 вершин. Выбрано несколько главных диагоналей, не имеющих общих концов. Докажите, что сумма длин этих диагоналей меньше суммы длин остальных главных диагоналей.* (И. Богданов, С. Берлов)

Решение. Назовём *главной диагональю (2n+1)-угольника* $K = A_1A_2...A_{2n+1}$ любой отрезок вида A_iA_{i+n} (нумерация вершин циклическая, так что $A_{i+2n+1} = A_i$). Докажем индукцией по n, что сумма длин любого выбранного набора главных диагоналей многоугольника K, не имеющих общих вершин, меньше суммы длин оставшихся его главных диагоналей. База при $n = 1$ следует из неравенства треугольника, ибо главными диагоналями треугольника являются его стороны. Пусть теперь $n > 1$. Обозначим сумму длин выбранных главных диагоналей через s_1, а невыбранных — через s_2. Можно считать, что выбрана диагональ A_1A_{n+2}. Тогда диагонали A_1A_{n+1} и A_2A_{n+2} не выбраны и пересекаются в некоторой точке P. Значит, $A_1A_{n+2}+A_2A_{n+1} < A_1P+PA_{n+2}+A_2P+PA_{n+1} = A_1A_{n+1}+A_2A_{n+2}$ (*). Рассмотрим теперь многоугольник $M = A_2... A_{n+1}A_{n+3}...A_{2n+1}$. Нетрудно видеть, что его главными диагоналями являются A_2A_{n+1}, а также все главные диагонали многоугольника K, не содержащие вершин A_1 и A_{n+2} (при переходе от K к M по каждую сторону от такой диагонали исчезает по одной вершине). Выберем из них те же диагонали, что и в K, кроме A_1A_{n+2}. Применяя к ним предположение индукции, получаем $s_1-A_1A_{n+2} < s_2-A_1A_{n+1}-A_2A_{n+2}+A_2A_{n+1}$. Прибавляя к полученному неравенство (*), получаем требуемое. Переход доказан.