

**Решения заданий первого дня.**

1. В одной деревне живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Путешественник каждому жителю деревни задал два вопроса: "Сколько в деревне рыцарей?" и "На сколько отличаются количества рыцарей и лжецов?" Путешественник знает, что в деревне есть хотя бы один рыцарь. Всегда ли по полученным ответам путешественник сможет узнать, кто из жителей деревни рыцарь, а кто — лжец? (С. Берлов)

**Ответ.** Не всегда. **Решение.** Пусть в деревне 6 жителей, из которых один ответил: «Один. На 4.», двое ответили: «Двое. На 2.», а трое: «Трое. На 0.» Тогда в деревне может быть один рыцарь (тогда это первый), два (двое вторых) или три (трое третьих).

2. В стране Эйлерии 101 город. Каждые два города соединены двусторонним беспосадочным рейсом одной из 99 авиакомпаний. Известно, что из каждого города выходят рейсы всех 99 компаний. Назовём **треугольником** три города, попарно соединённых рейсами одной и той же компании. Докажите, что в Эйлерии не больше одного треугольника. (И. Богданов, Д. Карпов)

**Решение.** Назовём галочкой два рейса одной авиакомпании, выходящие из одного города. Из каждого города выходит ровно 100 рейсов, где представлены все 99 авиакомпаний. Поэтому каждый город служит центром ровно для одной галочки, то есть всего имеется 101 галочка.

Пусть в Эйлерии есть хотя бы два треугольника. Каждый из них порождает три галочки, принадлежащие одной авиакомпании. Но тогда на долю остальных 97 или 98 авиакомпаний остается максимум 95 галочек. Значит, найдётся авиакомпания, не имеющая галочек, то есть из каждого города выходит ровно по одному рейсу этой компании. Но у каждого рейса два конца, и суммарное количество этих концов не может равняться нечетному числу 101. Противоречие.

3. Дан равносторонний треугольник ABC. Точка D выбрана на продолжении стороны AB за точку A, точка E — на продолжении BC за точку C, а точка F — на продолжении AC за точку C так, что  $CF = AD$  и  $AC + EF = DE$ . Найдите угол BDE. (А. Кузнецов)

**Ответ.** 60°. **Решение.** Достроим треугольник ACE до параллелограмма ACEG. Так как  $CF = AD$ ,  $CE = AG$  и  $\angle FCE = \angle DAG = 60^\circ$ , треугольники DAG и FCE равны, откуда  $GD = EF$ . Следовательно,  $DE = AC + EF = GE + GD$ . Значит, точка G лежит на отрезке DE, и потому  $DE \parallel AC$ , откуда  $\angle BDE = \angle BAC = 60^\circ$ .

4. Даны 2n-значное натуральное число a и натуральное число k. Числа a и ka записали на ленте и каждую из двух записей разрезали на двузначные числа, начиная с последних цифр (при этом числа 00, 01, ..., 09 здесь тоже считаются двузначными; если в числе ka оказалось нечетное количество цифр, к нему спереди приписали 0). Оказалось, что у числа a полученные двузначные числа строго убывают справа налево (от младших разрядов числа a к старшим), а у числа ka — строго возрастают. Докажите, что  $k \geq n$ . (О. Нечаева, С. Берлов)

**Первое решение.** Запишем числа a и k в системе счисления с основанием 100. Двузначные числа, на которые в условии режутся записи чисел a и ka, будут в ней цифрами. Далее мы везде под «цифрами» мы понимаем цифры в 100-ичной системе счисления. Пусть в этой системе  $a = a_n \dots a_1$ .

Рассмотрим умножение a на k «в столбик». Для всех i от 2 до n положим  $b_i = ka_i + c_i$ , где  $c_i$  — перенос из (i-1)-го разряда в i-ый. Положим также  $b_1 = ka_1$ ,  $c_1 = 0$ . Заметим, что i-ая цифра произведения ka равна остатку  $r_i$  от деления  $b_i$  на 100 при всех  $i = 1, \dots, n$ .

Покажем по индукции, что  $c_i < k$  при всех i от 2 до n. Заметим, что  $c_i$  — это неполное частное от деления  $b_{i-1}$  на 100. Поэтому  $c_i \geq k \cdot b_{i-1} \geq 100k$ . Поскольку  $b_1 = ka_1 \leq 99k$ , перенос  $c_2$  меньше k — база проверена. Докажем переход. Пусть  $c_i < k$ . Тогда  $b_i = ka_i + c_i < 99k + k = 100k$ , откуда  $c_{i+1} < k$ .

Допустим,  $k < n$ . Тогда  $k \leq n-1$ , и из доказанного следует, что все  $c_i$  не превосходят  $n-2$ . Значит, по принципу Дирихле среди  $c_i$  найдутся два одинаковых:  $c_u = c_v = t$ . Пусть  $b_v = 100t + r_v$ ,  $b_u = 100t + r_u$  и  $v > u$ . Тогда  $b_v = ka_v + c_v \leq k(a_u - 1) + c_v < ka_u \leq b_u$ , откуда  $r_u > r_v$ , что противоречит требованию, чтобы цифры произведения ka возрастали от младших разрядов к старшим.

**Второе решение.** При  $i = 0, 1, \dots, n-1$  обозначим через  $A_i$  остаток от деления числа  $100^i \cdot a$  на  $10^{2n}$ , а через  $B_i$  — остаток от деления числа  $100^i \cdot ka$  на  $10^{2n}$ . Числа  $A_i$  и  $B_i$  неотрицательны, но меньше  $10^{2n}$ ; при этом их десятичные записи начинаются с последних  $2(n-i)$  цифр чисел a и ka, соответственно. Тогда из условия следует, что  $A_0 < A_1 < \dots < A_{n-1}$  и  $B_0 > B_1 > \dots > B_{n-1}$ . Кроме того,  $kA_i \equiv B_i \pmod{10^{2n}}$ .

Пусть  $kA_i = B_i + 10^{2n} \cdot t_i$ . Тогда  $10^{2n} \cdot t_i = kA_i - B_i > kA_{i-1} - B_{i-1} = 10^{2n} \cdot t_{i-1}$ , то есть  $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1}$ . Поскольку  $t_i$  — целые неотрицательные числа, получаем, что  $t_{n-1} \geq n-1$ , откуда  $10^{2n(n-1)} \leq 10^{2n} \cdot t_{n-1} \leq kA_{n-1} < 10^{2n} \cdot k$ . Итак,  $n-1 < k$ , что и требовалось доказать.

**Замечание.** Неравенства  $A_0 < A_1 < \dots < A_{n-1}$  и  $B_0 > B_1 > \dots > B_{n-1}$  из второго решения выполнены и в том случае, если полученные из числа a двузначные числа не строго убывают (но первое строго меньше второго!), а

двузначные числа, полученные из  $ka$ , нестрого возрастают (но первое строго больше второго!). Значит, утверждение задачи верно и при этих более слабых условиях.

**Решения заданий второго дня.**

**5.** Можно ли прямоугольник  $1000 \times 2016$  разрезать на прямоугольники  $1 \times 2015$  и трёхклеточные «уголки» так, чтобы присутствовали фигурки обоих видов? (Е. Бакаев)

**Ответ.** Нельзя. **Решение.** Допустим, можно. Очевидно, каждый из прямоугольников  $1 \times 2015$  примыкает к одной из коротких сторон прямоугольника  $1000 \times 2016$ , а от другой стороны отстоит на одну клетку. Назовём прямоугольник  $1 \times 2015$  *чёрным* (соответственно, *белым*), если эта клетка покрыта уголком, две другие клетки которого находятся выше (соответственно, ниже) этого прямоугольника.

Самый нижний из прямоугольников  $1 \times 2015$  должен быть чёрным: иначе ниже него расположен прямоугольник  $2016 \times k$ , количество клеток которого делится на 3 и который должен быть полностью замощён трёхклеточными уголками и «доминошкой» из двух клеток, что невозможно. По той же причине самый верхний из прямоугольников  $1 \times 2015$  должен быть белым. Но тогда среди прямоугольников  $1 \times 2015$  найдутся чёрный и белый, лежащий выше этого чёрного, между которыми нет других таких прямоугольников. Лежащий между ними прямоугольник  $2016 \times k$  должен быть полностью замощён трёхклеточными уголками и двумя «доминошками» из двух клеток, что невозможно.

**6.** В школе 30 кружков, в каждом занимаются 40 детей. Для каждого  $i = 1, 2, \dots, 30$  обозначим через  $n_i$  количество детей, занимающихся ровно в  $i$  кружках. Докажите, что в этой же школе можно организовать 40 кружков с 30 детьми в каждом так, чтобы числа  $n_i$  для этих новых кружков были бы теми же самыми. (В. Дольников)

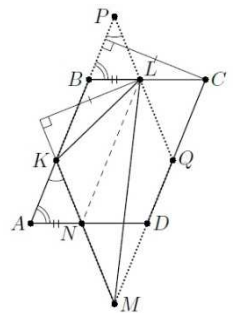
**Решение.** Выпишем в ряд членов первого кружка, за ними — второго и т.д. При этом если ребёнок входит и в  $i$ -ый и в  $(i+1)$ -ый кружок, мы его в списке  $(i+1)$ -ого кружка записываем таким же по счёту, что в списке  $i$ -го. Нарезав получившийся длинный список на куски длины 30, получим 40 новых кружков, которые, очевидно, удовлетворяют условию задачи. При этом никто не попадёт в один кружок дважды, потому что расстояние между двумя вхождениями в длинный список одного и того же ребёнка по построению не меньше 40, а, значит, и не меньше 30.

**7.** Сумма неотрицательных чисел  $a, b, c$  и  $d$  равна 4. Докажите, что  $(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc) \leq 8$ . (А. Храбров)

**Решение.**  $\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)} \leq \frac{ab+cd+ac+bd}{2} = \frac{(a+d)(b+c)}{2} \leq \frac{1}{2} \left( \frac{a+b+c+d}{2} \right)^2 = 2$ . Аналогично,

$\sqrt{(ab+cd)(ad+bc)} \leq 2$  и  $\sqrt{(ac+bd)(ad+bc)} \leq 2$ . Перемножая три полученных неравенства, получаем искомое.

**8.** Дан параллелограмм  $ABCD$ . На сторонах  $AB$  и  $BC$  и продолжении стороны  $CD$  за точку  $D$  выбраны соответственно точки  $K, L$  и  $M$  так, что треугольники  $KLM$  и  $BCA$  равны (именно с таким соответствием вершин). Отрезок  $KM$  пересекает отрезок  $AD$  в точке  $N$ . Докажите, что  $LN \parallel AB$ . (Б. Обухов)



**Первое решение.** Проведём через  $L$  прямую, параллельную  $KM$ ; пусть она пересекает прямые  $AB$  и  $CD$  в точках  $P$  и  $Q$  соответственно. Заметим, что высоты треугольников  $BCA$  и  $KLM$ , опущенные из соответственных вершин  $C$  и  $L$ , равны; в свою очередь, они равны расстояниям между парами параллельных прямых  $AB, CD$  и  $KM, PQ$ . Значит, эти прямые образуют ромб  $KPQM$ , то есть  $PK = KM = AB$ . Отсюда имеем  $BP = KP - KB = AB - KB = AK$ . Кроме того, из параллельности получаем  $\angle AKN = \angle BPL$  и  $\angle NAK = \angle LBP$ . Значит, треугольники  $AKN$  и  $BPL$  равны; в частности,  $AN = BL$ . Поэтому четырёхугольник  $ANLB$  — параллелограмм, и  $LN \parallel AB$ .

**Второе решение.** Проведём через точку  $L$  прямую, параллельную  $AB$ . Пусть она пересекает прямую  $KM$  в точке  $N'$ . Тогда  $\angle BKL = \angle KLN'$ ; кроме того, по условию  $\angle KBL = \angle LKN'$ . Следовательно, треугольники  $BKL$  и  $KLN'$  подобны по двум углам, откуда  $KN'/BL = LN'/KL = LN'/BC$  (последнее равенство верно, поскольку  $KL = BC$ ). С другой стороны, в трапеции  $MKBC$  отрезок  $N'L$  параллелен основаниям, поэтому  $KN'/BL = KM/BC = AB/BC$ . Таким образом,  $LN'/BC = KN'/BL = AB/BC$ , то есть  $LN' = AB$ . Значит,  $ABLN'$  — параллелограмм, а значит, точка  $N'$  лежит на  $AD$  и, следовательно, совпадает с  $N$ , откуда  $LN \parallel AB$ .

