IX МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА имени ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

3 (заключительный) этап, 21-24 марта 2017 г.

**\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_**

***Первый день.***

**1.** Можно ли за каждую цифру от 0 до 9 назначить цену так, чтобы все 10 цен были различны и нашлись 20 идущих подряд натуральных чисел, каждое из которых, кроме первого, стоит дороже предыдущего? Здесь цена натурального числа — это сумма цен цифр в его записи. (И. Рубанов+жюри)

**2.** График , где *c* > 0, имеет с осью ординат общую точку *C*, а ось абсцисс пересекает в точках *X*1 и *X*2. Обозначим через *O* начало координат. Докажите, что ∠*CX*1*O*+∠*CX*2*O* = 90°. (А. Шкловер)

**3.** Диагонали выпуклого четырехугольника *ABCD* пересекаются в точке *E*. Известно, что *AB* = *BC* = *CD* = *DE* = 1. Докажите, что *AD* < 2. (А. Кузнецов)

4. У Зевса имеются весы, позволяющие узнавать вес положенного на них груза, и мешок со 100 монетами, среди которых есть 10- и 9-граммовые. Зевсу известно общее число *N* 10-граммовых монет в мешке, но неизвестно, какие именно сколько весят. Он хотел бы сделать четыре взвешивания на весах и в результате гарантированно найти хотя бы одну 9-граммовую монету. При каком наибольшем *N* это возможно? (К. Кноп)

IX МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА имени ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

3 (заключительный) этап, 21-24 марта 2017 г.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

***Второй день.***

**5.** Некоторое натуральное число *a* разделили с остатком на числа 1, 2, 3, …, 1000. Могло ли так случиться, что среди остатков ровно по 10 раз встретятся числа 0, 1, 2, 3, …, 99? (С. Берлов)

**6.** В выпуклом четырёхугольнике *ABCD* углы *A* и *C* равны 100°. На сторонах *AB* и *BC* выбраны точки *X* и *Y* соответственно так, что *AX* = *CY*. Оказалось, что прямая *YD* параллельна биссектрисе угла *ABC*. Найдите угол *AXY*. (А. Кузнецов, С. Берлов)

**7.** Дана окружность длины 90. Можно ли отметить на ней 10 точек так, чтобы среди дуг с концами в этих точках имелись дуги со всеми целочисленными длинами от 1 до 89? (К. Кноп)

**8.** Дано нечётное натуральное число *a*, большее 100. На доску выписали все натуральные числа вида , где *n* ⎯ натуральное число. Оказалось, что при  все они простые. Докажите, что и каждое из остальных выписанных на доску натуральных чисел простое или равно единице. (А. Храбров)