X олимпиада имени Леонарда Эйлера, заключительный этап

Решения заданий первого дня.

1. *Петя загадал натуральное число N, Вася хочет его отгадать. Петя сообщает Васе сумму цифр числа N+1, затем сумму цифр числа N+2 и т. д. Верно ли, что рано или поздно умный Вася сможет с гарантией установить Петино число?* (М. Дидин)

Ответ. Верно. **Решение**. Пусть $10^k \le N < 10^{k+1}$. Через $10^{k+1}–N$ шагов Петя впервые выпишет единицу, а ещё через $10^{k+2}–10^{k+1} = 9\cdot 10^{k+1}$ шагов он выпишет единицу второй раз. Зная количество шагов между двумя этими событиями, мы найдем k, а зная k и количество шагов до первого события, найдём N.

2. *Найдите наименьшее натуральное k такое, что для некоторого натурального числа a, большего 500 000, , и некоторого натурального числа b выполнено равенство* $\frac{1}{a}+\frac{1}{a+k}=\frac{1}{b}$. (И. Богданов)

Ответ. $k = 1001$. **Решение**. *Оценка*. Положим $a+k = c$ и НОД$(a, c) = d$. Тогда $a = da_1$, $c = dc_1$ и $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{a_1+c_1}{da_1c_1}$. Так как числа a_1c_1 и a_1+c_1 взаимно просты, d должно делиться на a_1+c_1. Поэтому $d \ge a_1+c_1$ и $d^2 \ge d(a_1+c_1) = a+c > 10^6$, откуда $d \ge 1001$ и $k = d(c_1–a_1) \ge 1001$. *Пример*. $a = 500500$, $k = 1001$: $\frac{1}{500500}+\frac{1}{501501}=\frac{1}{250500}$.

3. *Диагонали выпуклого четырёхугольника ABCD равны и пересекаются в точке K. Внутри треугольников AKD и BKC выбрали точки P и Q соответственно так, что $\angle KAP = \angle KDP = \angle KBQ = \angle KCQ$. Докажите, что прямая PQ параллельна биссектрисе угла AKD.* (С. Берлов)

Решение. Так как $\angle KAP = \angle KCQ$, $CQ \parallel AP$. Так как $\angle KDP = \angle KBQ$, $BQ \parallel DP$. Пусть BX и CY — перпендикуляры, опущенные из B и C на DP и AP соответственно. Тогда прямоугольные треугольники BDX и CAY равны по гипотенузе и острому углу, откуда $BX = CY$. Это значит, что расстояния между прямыми CQ и AP и между прямыми BQ и DP равны. Таким образом, прямые AP, BQ, CP и DQ, пересекаясь, образуют ромб $PMQN$, где M — точка пересечения DP и CQ. По свойству ромба $\angle MQP = \angle NQP = \angle MPQ = \angle NPQ$.

Пусть отрезок PQ пересекает диагонали AC и BD в точках U и V соответственно. Тогда $\angle CUQ = \angle MQU–\angle QCA = \angle MPV–\angle PDB = \angle PVD$. Значит, в треугольнике KUV углы при основании UV равны, он равнобедренный, и поэтому внешняя биссектриса его угла K параллельна UV, что и требовалось. Если же $K = U = V$, полученное равенство углов сразу говорит, что PQ — биссектриса угла AKD.

4. *В вершинах правильного 300-угольника расставлены числа от 1 до 300 по одному разу в некотором порядке. Оказалось, что для каждого числа a среди ближайших к нему 15 чисел по часовой стрелке столько же меньших a, сколько и среди 15 ближайших к нему чисел против часовой стрелки. Число, которое больше всех 30 ближайших к нему чисел, назовём* ***огромным***. *Каково наименьшее возможное количество огромных чисел?* (С. Берлов)

Ответ. 10. **Решение**. *Оценка*. Чтобы доказать, что огромных чисел не меньше 10, достаточно доказать, что среди любых 30 стоящих подряд чисел встретится огромное. Действительно, пусть это не так. Тогда рассмотрим самое большое из этих 30 чисел. С одной из сторон от него все 15 ближайших чисел будут входить в эту тридцатку, а значит, будут меньше него. Но тогда по условию и 15 ближайших чисел с другой стороны от него будут меньше него, т. е. оно будет огромным. Противоречие. *Пример*. Все числа, заканчивающиеся на 0, расставим в таком порядке: 300, 280, 260, 240, ..., 20, 290, 270, 250, ..., 10. За ними в подобном же порядке расставим числа, заканчивающиеся на 1: 291, 271, ... ,11, 281, ..., 1, затем аналогично расставим числа, оканчивающиеся на 2, и т. д. пока круг не замкнётся. Нетрудно убедиться, что все условия будут выполнены, а огромными будут только числа от 291 до 300.

X олимпиада имени Леонарда Эйлера, заключительный этап

Решения заданий второго дня.

5. *Целые числа a, b, c и натуральное число n таковы, что $a+b+c = 1$ и $a^2+b^2+c^2 = 2n+1$. Докажите, что $a^3+b^2-a^2-b^3$ делится на n.* (Н. Агаханов)

Решение. Из условия следует, что $a^2+b^2+(1-a-b)^2 = 2n+1$, откуда $a^2+b^2+ab-(a+b) = n$. Поэтому $a^3+b^2-a^2-b^3 = (a^3-b^3)+(b^2-a^2) = (a-b)(a^2+b^2+ab-(a+b)) = (a-b)\cdot n$, что и требовалось доказать.

6. *Среди десяти человек ровно один лжец и 9 рыцарей. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. Каждому из них дали карточку с натуральным числом от 1 до 10, причем все числа на карточках различны. Любому можно задать вопрос: «Верно ли, что на твоей карточке написано число M?» (M может быть только натуральным числом от 1 до 10). Верно ли, что за 17 таких вопросов можно гарантированно найти лжеца?* (О. Подлипский)

Ответ. Верно. **Решение**. Зададим одному человеку 9 вопросов — про числа от 1 до 9. Если он лжец, мы получим не меньше восьми положительных ответов и тем самым найдем его. В противном случае он рыцарь, и мы узнаем, что написано на его карточке: если число от 1 до 9, то мы получим утвердительный ответ на соответствующий вопрос, а если число 10, то все ответы будут отрицательными. Узнав, какое число M написано на карточке у первого, зададим восьмерым из остальных вопрос про это число. Если кто-то ответит утвердительно — лжец он, если все ответят отрицательно — лжец тот, кому мы не задавали вопросов.

7. *Из клетчатой доски размером 70×70 вырезали 2018 клеток. Докажите, что доска распалась не более чем на 2018 кусков. Два куска, не имеющие общих точек кроме вершин клеток, считаются не соединёнными друг с другом.* (И. Рубанов)

Решение. Нетрудно построить цикл, проходящий по разу через все клетки доски 70×70 так, что соседние клетки в нем имеют общую сторону: можно, например, пройти всю первую вертикаль от нижней клетки до верхней, потом ходить по вертикалям «змейкой» от верхней горизонтали до второй снизу и обратно, а по последней вертикали вернуться на первую горизонталь и по ней — в исходную клетку. «Расклеим» все общие стороны клеток на доске, кроме общих сторон между соседними клетками нашего цикла. Даже после этого 2018 выброшенных клеток будут разбивать этот цикл не более чем на 2018 частей, а при обратной склейке цикла в доску число частей не увеличится.

8. *Вершина F параллелограмма ACEF лежит на стороне BC параллелограмма ABCD. Известно, что $AC = AD$ и $AE = 2CD$. Докажите, что $\angle CDE = \angle BEF$.* (А. Кузнецов)

Первое решение. Пусть M — середина отрезка CF. Поскольку четырехугольник $ACEF$ — параллелограмм, точка M является серединой отрезка AE. Обозначим $\angle MAC = \angle MEF = \alpha$ и $\angle ABC = \angle ADC = \angle ACD = \beta$. Так как $AM = AE/2 = CD$, $AMCD$ — равнобокая трапеция, откуда мы получаем что $\alpha = \angle MAC = \angle MDC$ и $MD = AC = AD$. Кроме того, поскольку $MA = CD = AB$ и $\angle ABM = \angle ADC = \beta$, равнобедренные треугольники ABM и ACD подобны, поэтому $AB/BM = AC/CD$. Треугольники BME и EMD также подобны, так как

$$\angle BME = 180° - \beta = 180° - \angle DMA = \angle EMD \text{ и } BM/ME = BM/MA = CD/AD = MA/MD = EM/MD.$$

Значит, $\angle BEM = \angle EDM$, откуда $\angle BEF = \angle BEM - \alpha = \angle EDM - \alpha = \angle CDE$, что и требовалось.

Второе решение. Как и в первом решении, введём точку M и покажем, что $AMCD$ — равнобокая трапеция. Отложим на луче DC отрезок $CS = DC = ME$. Поскольку $\angle SCB = \angle ABC = \beta = \angle EMC$, перпендикуляры, опущенные на BC из точек E и S, равны, откуда $SE \parallel BC$. Поэтому четырёхугольники $MSEC$ и $ASED$ — также равнобокие трапеции; в частности, $ASED$ вписана в некоторую окружность ω. С другой стороны, поскольку отрезки AB и CS параллельны и равны, $ACSB$ — параллелограмм, откуда $BS = AC = AD$. Значит, $DABS$ — также равнобокая трапеция. Поскольку точки A, S и D лежат на ω, точка B лежит на этой же окружности. Из вписанного четырёхугольника $BSED$ теперь получаем $\angle SBE = \angle SDE = \angle CDE$. Осталось заметить, что $BSEF$ — параллелограмм (ибо BS параллелен и равен FE), откуда $\angle BEF = \angle SBE = \angle CDE$.