XI МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА имени ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

3 (заключительный) этап, 25-28 марта 2019 г.

**\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_**

***Первый день.***

**1.** Даны два числа (не обязательно целые), не равные 0. Если каждое из них увеличить на единицу, их произведение увеличится вдвое. А во сколько раз увеличится их произведение, если каждое из исходных чисел возвести в квадрат и затем уменьшить на единицу? (Д. Ширяев, И. Рубанов)

**2.** Устройство КК42 работает так: если положить в него четыре шарика, то в первый лоток вывалится второй по весу шарик (т. е. шарик веса *b*, если *a* > *b* > *c* > *d*), а во второй лоток вывалятся остальные. С другим числом шариков устройство не работает. Имеются 100 одинаковых на вид шариков попарно различных весов. Их пронумеровали числами 1, 2, ..., 100. Как, использовав прибор не более 100 раз, найти самый тяжелый шарик? (К. Кноп)

**3.** Дано 1000-значное число без нулей в записи. Докажите, что из этого числа можно вычеркнуть несколько (возможно, ни одной) последних цифр так, чтобы получившееся число не было натуральной степенью числа, меньшего 500. (С. Берлов)

4. Дан выпуклый четырёхугольник *ABSC*. На диагонали *BC* выбрана точка *P* так, что *AP* = *CP* > *BP*. Точка *Q* симметрична точке *P* относительно середины диагонали *BC*, а точка *R* симметрична точке *Q* относительно прямой *AC*. Оказалось, что *SAB* = *QAC* и *SBC* = *BAC*. Докажите, что *SA* = *SR*. (С. Берлов)

XI МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА имени ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

3 (заключительный) этап, 25-28 марта 2019 г.

**\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_**

***Второй день.***

**5.** Графики линейных функций *y* = *ax*+*c*, *y* = *ax*+*d*, *y* = *bx*+*e*, *y* = *bx*+*f* пересекаются в вершинах квадрата *P*. Могут ли точки *K*(*a*, *c*), *L*(*a*, *d*), *M*(*b*, *e*), *N*(*b*, *f*) располагаться в вершинах квадрата, равного квадрату *P*? (И. Рубанов)

**6.** Точки *M* и *N* — середины сторон *AB* и *BC* соответственно треугольника *ABC*. На продолжении отрезка *CM* за точку *M* отмечена точка *D*. Оказалось, что *BC* = *BD* = 2 и *AN* = 3. Докажите, что *ADC* = 90. (А. Кузнецов)

**7.** На доске написаны числа 1, 2, ..., 1000. Разрешается стереть любые два числа *a* и *b* и записать вместо них числа *ab* и *a*2+*b*2. Можно ли такими операциями добиться, чтобы среди чисел, написанных на доске, было хотя бы 700 одинаковых? (М. Антипов)

**8.** Дано натуральное число *k*. В городе несколько детей, они ходят в несколько кружков. Известно, что в каждый кружок ходит не более 3*k* детей, любой ребёнок ходит ровно в три кружка, и для любых двух детей есть кружок, в которой оба они ходят. Какое наибольшее количество детей может быть в городе? (И. Богданов, Г. Челноков)