XII олимпиада имени Леонарда Эйлера, заключительный этап

Решения заданий первого дня.

1. *На доске написано четыре положительных числа. Докажите, что какие-то два из них отличаются меньше, чем на треть суммы двух остальных.* (С. Берлов)

Решение. Пронумеруем написанные числа по возрастанию: $a_1 \le a_2 \le a_3 \le a_4$. Если $a_2–a_1 < (a_3+a_4)/3$, то все доказано. В противном случае $a_2 > a_2–a_1 \ge (a_3+a_4)/3 \ge 2a_3/3$, откуда $a_3–a_2 < a_3/3 \le a_4/3 < (a_4+a_1)/3$.

2. *В лагерь приехали 99 школьников, причём все приехавшие имеют одно и то же ненулевое количество знакомых среди остальных. Группу ребят, обладающую тем свойством, что любой из приехавших, не входящий в эту группу, знаком с кем-то из этой группы, будем называть популярной. Докажите, что из любой популярной группы, содержащей более 49 ребят, можно выбрать популярную группу, содержащую ровно 49 ребят.* (С. Берлов)

Решение. Докажем, что из любой популярной группы, состоящей более, чем из 49 ребят, можно кого-то удалить так, что группа останется популярной. Пусть все приехавшие имеют ровно по k знакомых. Рассмотрим какую-то популярную группу A, в которую входит не менее 50 школьников. Будем считать, что все остальные школьники входят в группу B. Предположим, что при удалении из A любого школьника она перестаёт быть популярной. Тогда школьники из этой группы делятся на тех, для каждого из которых найдётся кто-то из B, знакомый только с ним — назовём эту группу A_1 — и остальных, которые знакомы только со школьниками из B (и потому, попав после удаления из группы A в группу B, оказываются незнакомы ни с кем из A) — назовём эту группу A_2. Каждому школьнику из группы A_1 сопоставим одного школьника из B, который знаком только с этим школьником из A_1. Они образуют группу B_1. Пусть остальные школьники из B образуют группу B_2. Пусть $|X|$ означает число элементов во множестве X. Все школьники из A суммарно имеют не менее $|A_1|+k|A_2|$ знакомств в B. С другой стороны, школьники из B суммарно имеют не более $|B_1|+k|B_2|$ знакомств в A. Значит, $|A_1|+k|A_2| \le |B_1|+k|B_2|$ Но поскольку $|A_1| = |B_1|$, а $|A_2| \ge 50–|A_1| > 49–|B_1| = |B_2|$, получаем, что $|A_1|+k|A_2| > |B_1|+k|B_2|$ — противоречие.

3. *Дан треугольник ABC, в котором $2\angle B – \angle A = 180°$. Внутри него выбрана точка K, а на его стороне AB — точка $L \ne B$ так, что $\angle ACK = 2\angle BCK$ и $BK = KL$. Докажите, что $CK+AL = AC$.* (И. Богданов)

Решение. Обозначим $\angle A = 2\alpha$, $\angle C = 3\gamma$, $\angle B = \pi-\beta$. Тогда из условия вытекает, что $\beta = 2\alpha+3\gamma = 90°-\alpha$, откуда $\alpha+\gamma = 30°$, $\beta-\gamma = 60°$ и $\alpha+\beta = 90°$.

Отложим на луче AB такой отрезок AP, что $AP = AC$. Достаточно доказать, что $CK = PL$. Опустим перпендикуляры: CH — на AP, KT — на CH, KM — на AB. Заметим, что $\angle CPB = 90°–\alpha = \beta = \angle PBC$, откуда $PH = BH$. Кроме того, из равенства $BK = KL$ следует, что $LM = MB$. Поэтому $KT = MH = LP/2$. Заметим теперь, что $\angle KCB = \angle C/3 = \gamma$, и потому $\angle KCT = \gamma+\alpha = 30°$, откуда $CK = 2KT = PL$, что и требовалось доказать.

4. *Натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_k$ ($k < 2020$) удовлетворяют такому условию: для любого из них можно выбрать из остальных чисел одно или несколько так, чтобы сумма их 1024-ых степеней делилась на его 1024-ую степень. Докажите, что среди этих чисел есть два равных.* (С. Кудря)

Решение. Заметим прежде всего, что чисел, меньших числа $2^{11} = 2048$ и взаимно простых с ним ровно 1024, поэтому по теореме Эйлера 1024-ая степень нечетного числа при делении на 2048 дает остаток 1. Пусть среди наших чисел есть четное число a_i. Тогда его 1024-ая степень делится на 2^{11}. Поскольку единицами в количестве, не большем $k < 2020 < 2^{11}$, число, делящееся на 2^{11}, не набрать, числа, сумма 1024-ых степеней которых делится на 1024-ую степень числа a_i, все четны. Тогда мы можем удалить из нашего набора все нечетные числа, а все четные разделить на 2. Получится новый набор менее чем из 2020 чисел, удовлетворяющий условию, причем максимальное число набора при этом уменьшилось. После нескольких таких операций придем к набору, где все числа нечетны.

Пусть сумма 1024-ых степеней m нечетных чисел делится на 1024-ю степень еще одного нечетного числа. Обозначим частное через n. Так как все 1024-ые степени дают остаток 1 при делении 2^{11}, получаем, что $m–n$ должно делиться на 2^{11}. Поскольку $m < 2^{11}$, имеем $n \ge m$. Тогда выберем из наших чисел наибольшее, и если оно не равно никакому из остальных, получим противоречие, ибо частное n будет меньше числа слагаемых m.

XII олимпиада имени Леонарда Эйлера, заключительный этап

Решения заданий второго дня.

5. *Сумма дробных частей нескольких положительных чисел равна целой части их произведения. Докажите, что дробная часть суммы этих чисел равна произведению их целых частей. Напомним, что целая часть [x] числа x — это наибольшее целое число, не превосходящее x (например [1,3] = 1), а дробная часть {x} числа x задается формулой {x} = x–[x].* (М. Дидин)

Решение. Если дробная часть числа равна целому числу, то это 0. Значит, надо доказать, что сумма наших чисел — целое число и произведение их целых частей равно 0. Первое очевидно, так как по условию сумма дробных частей наших чисел — целое число. Допустим, второе неверно. Тогда у всех наших чисел $x_1, \ldots, x_n$ целые части не меньше 1, и мы меем

$$x_1\cdot\ldots\cdot x_n = ([x_1]+\{x_1\})\ldots([x_n]+\{x_n\}) \geq [x_1]\cdot\ldots\cdot[x_n]+\{x_1\}[x_2]\cdot\ldots\cdot [x_n]+\ldots+[x_1][x_2]\cdot\ldots\cdot\{x_n\}+\ldots \geq 1+\{x_1\}+\ldots+\{x_n\},$$

откуда $x_1\cdot\ldots\cdot x_n \geq 1+[x_1\cdot\ldots\cdot x_n]$, что невозможно.

6. *На каждой стороне выпуклого 100-угольника отметили по две точки, делящие эту сторону на три равные части. После этого всё, кроме отмеченных точек, стерли. Докажите, что по отмеченным точкам можно однозначно восстановить исходный 100-угольник.* (С. Берлов)

Решение. Допустим, есть выпуклый 100-угольник M, отличный от стертого 100-угольника N, у которого набор отмеченных точек такой же. Пусть на сторонах AB, BC и CD многоугольника N отмечены точки A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, идущие от A к D в указанном порядке. Тогда на стороне UV 100-угольника M, на которой лежит точка A_2, должна лежать и точка B_1 — иначе отмеченные точки будут находиться по обе стороны от прямой UV, что противоречит выпуклости 100-угольника M. Таким образом, стороны 100-угольника M лежат на прямых, соединяющих отмеченные точки 100-угольника N, соседние с его вершинами.

Пусть VW — следующая за UV сторона 100-угольника M. На ней лежат отмеченные точки B_2 и C_1. Так как точка пересечения B_1 диагоналей четырехугольника A_2BVB_2 делит их пополам, прямые A_2B и VB_2, то есть AB и VW, параллельны. Аналогично, прямая VW параллельна стороне DE 100-угольника N, идущей после CD. Получается, что $AB \parallel DE$, то есть каждая сторона 100-угольника N параллельна двум сторонам, располагающимся через две от нее. Но у выпуклого многоугольника не может быть трех параллельных сторон. Противоречие.

7. *Дано натуральное число n. Множество A, составленное из натуральных чисел, таково, что для любого натурального числа m, не превосходящего n, во множестве A есть число, делящееся на m. Какое наименьшее значение может принимать сумма всех элементов множества A?* (А. Кузнецов)

Ответ. $(k+1)+(k+2)+\ldots+(2k+1) = (k+1)(3k+2)/2$ при $n = 2k+1$ и $(k+1)+\ldots+2k = k(3k+1)/2$ при $n = 2k$.

Решение. *Пример*. Искомое множество образуют слагаемые, указанные в ответе.

Оценка. Лемма. Пусть $a_1 < a_2 < \ldots < a_k < 2a_1$. Тогда НОК чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$ не меньше их суммы. Доказательство. Пусть НОК чисел $a_1, \ldots, a_k$ есть $M = a_1n_1 = a_2n_2 = \ldots = a_kn_k$. Тогда $2n_k > n_1 > n_2 > \ldots > n_k$. Следовательно, $2n_k–n_k \geq k$ и $M \geq ka_k \geq a_1+\ldots+a_k$.

Пусть теперь A — множество, удовлетворяющее условиям задачи. Каждому натуральному числу из указанных в ответе сопоставим одно из делящихся на него чисел множества A. Тогда каждое число из A делится на НОК всех сопоставленных ему чисел, и, стало быть, не меньше суммы этих чисел, а сумма всех чисел из A — не меньше суммы, указанной в ответе.

8. *В языке племени УЫ всего две буквы: «У» и «Ы». Словом считается любая последовательность из 2n букв У и 2n букв Ы (число n дано и фиксировано). Языковеды называют слова похожими, если одно можно получить из другого* ***одной*** *перестановкой двух соседних букв У и Ы. Какое наибольшее количество слов можно выписать на доску так, чтобы любые два из выписанных слов не были похожи? В записи ответа допустимы только четыре арифметические операции, возведение в степень, взятие факториала и стандартных комбинаторных величин, там не должно содержаться многоточий и число использованных операций не должно зависеть от n.* (Д. Белов, И. Богданов)

Ответ. $\dfrac{C_{4n}^{2n}-C_{2n}^{n}}{2}+C_{2n}^{n}=\dfrac{C_{4n}^{2n}+C_{2n}^{n}}{2}$. **Решение**. *Оценка*. Всего имеется C_{4n}^{2n} слов: по числу размещений $2n$ букв «У» по $4n$ местам. Разобьём каждое слово на блоки по 2 символа. Если есть хотя бы один блок из разных букв, назовём самый левый такой блок *вариативным*. Назовём два слова *идентичными*, если они совпадают везде, кроме общего вариативного блока. В наборе попарно непохожих слов не может быть двух идентичных. Все слова разбиваются на пары идентичных, кроме слов, в которых каждый блок состоит из двух одинаковых букв (назовём их *уникальными* и заметим, что их C_{2n}^{n}). Отсюда и следует оценка.

Пример. Выберем все слова, где сумма мест, на которых стоит буква «У», имеет ту же чётность, что и n. Они, очевидно, попарно непохожи. С другой стороны, в любой паре идентичных слов ровно одно выбрано, и все уникальные тоже выбраны. Поэтому на этом наборе оценка достигается.