**XV МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ИМЕНИ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА**

**Решения заданий заключительного этапа, 1 день**

**1**. *На доске написаны натуральные числа от 1 до 1000, по одному разу каждое. Вася может стереть любые два числа и записать вместо них одно: их* *наибольший общий делитель или их наименьшее общее кратное. Через 999 таких операций на доске осталось одно число, равное натуральной степени десятки. Какое наибольшее значение она может принимать?* (С. Берлов)

**Ответ**. Четвертую. **Решение**. Пример. Сначала получаем 104 = НОК(16, 625). Затем, последовательно беря НОД(1, *n*) = 1 для всех оставшихся *n* от 2 до 1000, оставляем на доске только 104 и 1, и, наконец, берем НОК(104, 1) = 104. Оценка. Заметим, что если *m* и *n* не делятся на 55, то не делятся на 55 и их НОД и НОК. Так как ни одно из натуральных чисел от 1 до 1000 не делится на 55 = 3125, мы операциями взятия НОД и НОК не сможем получить степень десятки выше четвертой.

**2**. *Точка N — середина стороны AD выпуклого четырёхугольника ABCD, а точка M на стороне AB такова, что CM ⊥ BD. Докажите, что если BM > MA, то 2BC+AD > 2CN.* (С. Берлов)

**Решение**. Обозначим через *P* точку пересечения *CM* и *BD*. Опустим перпендикуляр *AQ* на прямую *BD*. Поскольку *BM* > *AM*, то по теореме Фалеса *BP* > *PQ*, откуда *BC* > *CQ*. Но, поскольку угол *AQD* прямой, *QN* = *AD*/2. В силу неравенства треугольника, *CN* ≤ *CQ*+*QN* < *BC*+*AD*/2, откуда 2*BC*+*AD* > 2*CN*.

**3**. *Среди натуральных чисел a1, …, ak, нет одинаковых, а разность между наибольшим и наименьшим из них меньше 1000. При каком наибольшем k может случиться, что все квадратные уравнения aix2+2ai+1x+ai+2 = 0, где 1 ≤ i ≤ k–2, не имеют корней?* (И. Богданов)

**Ответ**. При *k* = 88. **Решение**. Пусть ряд *a*1, …, *ak* удовлетворяет условию задачи. Отсутствие корней у указанных в условии уравнений равносильно выполнению неравенства (*ai*+1)2 < *aiai*+2 (\*) при всех *i* от 1 до *k*–2.

Оценка. *Лемма*. Если 0 < *a* < *b* < *c* и *b*2 < *ac*, то *b*–*a* < *c*–*b*. *Доказательство*. Положим *b*–*a* = *d* и *c*–*b* = *e*. Тогда *b*2 < (*b*–*d*)(*b*+*e*) = *b*2+(*e*–*d*)*b*–*de* Þ (*e*–*d*)*b*–*de* > 0, откуда *e*–*d* > 0.

Пусть *am* — наименьшее число ряда. Очевидно, одно из чисел *am*–1 и *am*+1 — не меньше, чем *am*+1, а другое — не меньше, чем *am*+2. Не умаляя общности будем считать, что *am*–1 ≥ *am*+1, а *am*+1 ≥ *am*+2. Тогда по лемме *am*–2 > *am*–1+1, то есть *am*–2 ≥ *am*–1+2. Аналогично, *am*–3 ≥ *am*–2+3, …, *a*1 ≥ *a*2+(*m*–1). Идя в другую сторону, таким же образом получаем *am*+2 ≥ *am*+1+3, …, *ak* ≥ *ak*–1+(*k*–*m*+1). Отсюда

*a*1 ≥ *am*+1+2+…+(*m*–1) = *am*+*m*(*m*–1)/2 и *ak* ≥ *am*+2+3+…+(*k*–*m*+1) = *am*+(*k*–*m*) (*k*–*m*+3)/2.

Поскольку разность между любыми двумя числами нашего ряда меньше 1000, из полученных неравенств имеем *m*(*m*–1)/2 < 1000 и (*k*–*m*)⋅(*k*–*m*+3)/2 < 1000, откуда *m* ≤ 45, *k*–*m* ≤ 43 и *k* ≤ 88.

Пример. Пусть *a*45 = 10000, *ai* = 10000+1+2+…+(45–*i*) при 1 ≤ *i* ≤ 44, *ai* = 10000+2+…+(*i*–44) при 46 ≤ *i* ≤ 88. Нетрудно убедиться, что *a*45 < *a*44 < *a*46 < *a*43 < *a*47< … < *a*88 < *a*1, так что все числа *ai* различны, и что *a*1 – *a*45= 1+2+…+44 = 990 < 1000. Осталось проверить выполнение неравенства (\*). Если *i* = 44, неравенство очевидно. Иначе положим *b* = *ai*+1–*ai*. Тогда по построению *ai*+2 = *ai*+2*b*+1, и неравенство (\*) записывается в виде (*ai*+*b*)2 < *ai*(*ai*+2*b*+1). Раскрыв скобки и приведя подобные чле­ны, получим неравенство *b*2 < *ai*, которое выполнено, так как *b*2 ≤ 442 < 10000 ≤ *ai*.

**4***. В 2n бочках налито 2n различных реактивов (в каждой — один реактив). Они разбиваются на n пар конфликтующих реактивов, но неизвестно, какая бочка конфликтует с какой. Инженеру нужно узнать это разбиение. У него есть n пустых пробирок.* *За одно действие он может долить в любую пробирку (пустую или непустую) реактив из любой бочки, других действий с реактивами он делать не может. Пока в пробирке нет конфликтующих соединений, в ней ничего не происходит. Как только среди реактивов, содержащихся в ней, появляются конфликтующие, она лопается, и больше её использовать не получится. Выливать из пробирки ничего нельзя. Как инженеру добиться своей цели?* (А. Матвеев, П. Мяктинов)

**Решение**. Пронумеруем пробирки числами от 1 до *n* и бочки числами от 1 до 2*n.* Назовем *операцией* *k* (*k* ≤ *n*) последовательное наливание в пробирки номер *k,* номер *k–*1, …, номер 1 (именно в таком порядке) реактива из *k-*ой бочки. *Операцией* *n+1* назовем последовательное наливание реактива из (*n+*1)-ой бочки в пробирки с номерами *n,* *n–*1, …, 1.

Будем последовательно проводить операции 1, 2, …, *n,* *n+*1 пока какая-то пробирка *m* не лопнет при операции *k* (после чего операция *k* прекращается) Это рано или поздно произойдет, так как среди *n+*1 реактива, которые надо наливать в пробирку 1, обязательно найдутся два конфликтующих. Перед операцией *k* в пробирке 1 находятся реактивы от 1 до *k–*1, в пробирке 2 – от 2 до *k–*1,…, в пробирке *k–*1 — реактив *k–*1. Поскольку пробирки с номерами от *m*+1 до *k* не лопнули, реактив *k* конфликтует именно с реактивом *m*. Уберем бочки с двумя конфликтующими реактивами, перенумеруем реактивы и бочки в том же порядке, в котором шли их старые номера. Про то, что убранные реактивы находятся в каких-то пробирках, можно забыть, так как они не повлияют на дальнейшие реакции.

Мы убрали два реактива, и сейчас в пробирке 1 находятся реактивы от 1 до
*k–*2 (в новой нумерации), в пробирке 2 — от 2 до *k–*2,…, в пробирке *k–*2 — реактив
*k–*2. Начинаем проводить операции *k–*1, *k,*…, пока какая-то пробирка не лопнет (это обязательно произойдет по той же причине, что и выше). Когда пробирка лопается, проделываем то же, что в предыдущем абзаце. Таким образом, потеряв одну пробирку, мы определяем одну пару конфликтующих реактивов. Значит, мы сможем определить все пары конфликтующих реактивов.