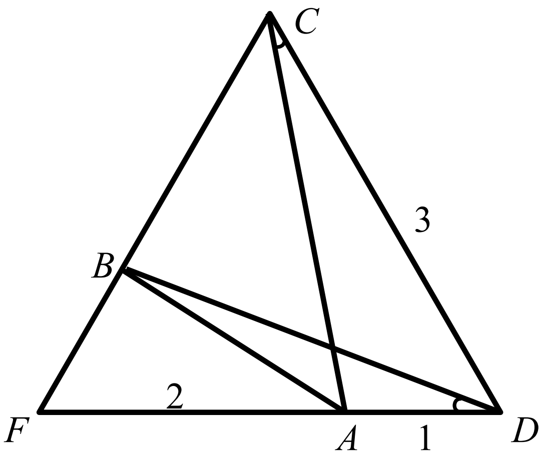
XVIII МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ИМЕНИ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

Решения заданий заключительного этапа, 2 день

5. *На шахматной доске размера 30×30 стоит 220 не бьющих друг друга королей. Докажите, что в любом квадрате 9×9 стоит не менее 11 королей. Напомним, что король бьет клетки, соседние со своей по горизонтали, вертикали или диагонали.* (С. Берлов)

Решение. Разобьем доску 30×30 на 225 квадратиков 2×2. В каждом из них не более одного короля. Значит, в 220 квадратиках по одному королю, а в пяти королей нет. В квадрат 9×9 можно поместить 16 квадратиков 2×2 из нашего разбиения, не имеющих общих клеточек. Из них может не быть королей максимум в пяти. Значит, не менее, чем в 11 из них, короли есть.

6. *В выпуклом четырёхугольнике ABCD диагонали равны, $\angle ADB = \angle ACD$, $CD = 3$, $AD = 1$ и $\angle BAD = 150°$. Найдите BC.* (С. Берлов)



Ответ. $BC = 2$. **Первое решение**. На продолжении отрезка DA за точку A отметим такую точку F, что $DF = 3$. Треугольники ACD и BDF равны по двум сторонам и углу между ними ($AC = BD$, $CD = DF$ и $\angle ACD = \angle BDF$). Следовательно, $BF = AD = 1$. В треугольнике ABF $AF = 2$ и $\angle BAF = 180°–\angle BAD = 30°$. Опустим перпендикуляр FG на прямую AB. Из прямоугольного треугольника AFG имеем $FG = AF/2 =1 = FB$, откуда $G = B$ и $\angle CDA = \angle BFA = 60°$. Таким образом, равнобедренный треугольник CDF является равносторонним, и $\angle BFD = \angle CFD$. Тем самым, точка B лежит на отрезке FC, и потому $BC = FC–FB = 3–1 = 2$. **Второе решение**. Отметим точку K на стороне CD так, чтобы $CK = 1$. Тогда треугольники CAK и DBA равны по двум сторонам и углу между ними, следовательно, $150° = \angle BAD = \angle AKC$, $\angle AKD = 30°$. Но $KD = 2AD$, поэтому треугольник AKD — прямоугольный. Кроме того, $AK = AB$, $\angle BAK = 150°–90° = 60°$, значит треугольник ABK — равносторонний и $\angle BKC = 150°–60° = 90°$, поэтому треугольники KAD и KBC равны по двум катетам, откуда $BC = KD = 2$.

7. *Натуральные числа a, b, c таковы, что число (ab+a+1)(bc+b+1)(ca+c+1) делится на abc+1. Может ли их частное быть квадратом простого числа?* (А. Кузнецов)

Ответ. Не может. **Решение**. Пусть частное равно p^2. Произведение любых двух скобок больше, чем $abc+1$, поэтому две скобки кратны p — пусть это $ab+a+1$ и $bc+b+1$. Тогда $ca+c+1 = (c+1)(ab+a+1)–a(bc+b+1)$ тоже делится на p. Значит, $(ab+a+1)(bc+b+1)(ca+c+1)$ делится на p^3, и потому $abc+1$ делится на p. Но тогда и $2 = (abc+1)–c(ab+a+1)+(ca+c+1)$ делится на p, откуда $p = 2$. Однако в этом случае abc нечетно, следовательно, нечетно и произведение скобок из условия, и потому его частное от деления на $abc+1$ не может равняться 2^2.

8. *На столе стоит 50 гирь попарно различных положительных весов. Может ли случиться, что для любых 24 из этих гирь среди оставшихся гирь можно выбрать несколько такого же суммарного веса?* (С. Берлов)

Ответ. Не может. **Решение**. Пусть гири имеют веса $a_1 > a_2 > a_3 ... > a_{50}$. Рассмотрим 24 набора $\{a_1, a_2, \dots, a_{24}\}$, $\{a_1, a_2, \dots, a_{23}, a_{25}\}$, ..., $\{a_1, a_2, \dots, a_{23}, a_{47}\}$ и 22 набора $\{a_1, a_2, \dots, a_{22}, a_{24}, a_{47}\}$, $\{a_1, a_2, \dots, a_{22}, a_{25}, a_{47}\}$, ..., $\{a_1, a_2, \dots, a_{22}, a_{45}, a_{47}\}$ — всего 46 наборов. Для каждого из этих наборов если расположить по убыванию веса наибольшие 24 из оставшихся гирь, то каждая будет весить меньше, чем соответствующая гиря набора. Поэтому для каждого из них нужно выбрать 26 или 25 из оставшихся 26 гирь, чтобы получить набор такого же веса. Заметим, что в рассматриваемых наборах суммарные веса гирь монотонно убывают. Поэтому для уравнивания можно выбрать не более одной группы из 26 гирь и не более 28 групп из 25 гирь, так как из оставшихся гирь можно удалять одну, вес этой удаляемой гири должен монотонно возрастать, и это не может быть гиря с номерами от 1 до 22. Противоречие.