XVII МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА имени ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА
Региональный этап

31 января 2025 г.

---

8 класс

Первый день

1. Найдите три **нецелых** положительных числа a, b, c таких, что все числа $\frac{a+b}{a-b}, \frac{b+c}{b-c}, \frac{c+a}{c-a}$ — целые.

2. В пещере собрались 100 гномов — по 10 гномов из 10 разных кланов. Каждый из них — рыцарь, всегда говорящий правду, или лжец, который всегда лжет. Каждый из собравшихся назвал клан, из которого, по его мнению, на собрание пришли одни лжецы. Оказалось, что каждый из 10 кланов назвало ровно 10 гномов. Докажите, что лжецов в пещере не меньше, чем рыцарей.

3. Числа x, y, z таковы, что $x > y^2+z^2$, $y > z^2+x^2$, $z > x^2+y^2$. Докажите, что каждое из чисел x, y, z меньше $\frac{1}{2}$.

4. В каждой клетке доски 2×200 лежит по рублёвой монете. Даша и Соня играют, делая ходы по очереди, начинает Даша. За один ход можно выбрать любую монету и передвинуть её: Даша двигает монету на соседнюю по диагонали клетку, Соня — на соседнюю по стороне. Если две монеты оказываются в одной клетке, одна из них тут же снимается с доски и достаётся Соне. Соня может остановить игру в любой момент и забрать все полученные деньги. Какой наибольший выигрыш она может получить, как бы ни играла Даша?

5. На биссектрисе угла ABC отмечена точка D. На отрезке AB отмечена точка E, а на отрезке BC — точка F, причём $AB = DE$ и $BC = DF$. Докажите, что из отрезков AD, CD и EF можно сложить треугольник.

XVII МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА имени ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА
Региональный этап

1 февраля 2025 г.

---

8 класс

Второй день

6. В начале года каждому из 150 бойцов лиги смешанных единоборств был присвоен номер от 1 до 150. В течение года было проведено 149 поединков: первого со вторым, второго с третьим, …, 149-го со 150-м. В конце года был составлен список бойцов, победивших во всех поединках, в которых они участвовали в прошедшем году. Могли ли в этом списке оказаться и все бойцы с номерами кратными 17, и все бойцы с номерами кратными 20?

7. В трапеции $ABCD$ диагональ BD является биссектрисой угла ADC. На основаниях BC и AD выбрали точки X и Y соответственно таким образом, что $AX = BD$ и $AY = CD$. Оказалось, что $\angle BCD = 130°$. Найдите величину угла AXY.

8. На экране калькулятора горит число 41. За одну операцию можно увеличить или уменьшить число на экране на 33 или 34. При этом запрещается получать числа, меньшие 1, и числа, большие 99. Через 2025 операций на экране оказалось число 50. Докажите, что в некоторый момент на экране было число 67.

9. На доску записали несколько (больше одного) последовательных натуральных чисел. Могло ли так случиться, что и сумма всех четных выписанных чисел — квадрат натурального числа, и сумма всех нечетных выписанных чисел — квадрат натурального числа?

10. На столе стоят 12 сосудов, выстроенных в 4 ряда по 3 сосуда в каждом. В каждый сосуд налито некоторое (возможно, нулевое) количество воды. Известно, что суммарное количество воды в каждом ряду равно 1 л. При каких значениях α можно утверждать, что на столе найдутся два сосуда, количества воды в которых отличаются не более чем на α л?