Леонард Эйлер атындағы VII олимпиаданың дистанционды кезеңінің бірінші туры

Есептер шешімі

1. *Алымы да, бөлімі де 1-ден өзгеше бүтін сан болатын, қосындысы бүтін болатын, және сол бөлшектерге кері болатын бөлшектердің де қосындысы бүтін болатын үш бөлшекті тап.*

Шешуі. Мысалға, 11/2, 11/6, 11/3 бөлшектері есеп шартын қанағаттандырады.

2. *Даша 1-ден 25-ке дейінгі натурал сандар ішінен, кез келген екеуінің айырмасы 4-ке бөлінетіндей алты сан таңдап алды. Даша таңдаған сандардың ішінде ең көп дегенде қаншауы жай болуы мүмкін?*

Жауабы: Бес сан. Шешуі. Таңдаған сандардың барлығының жұптығы бірдей екені айқын. Егер олар жұп болса, онда олардың ішінде тек бір ғана сан жай бола алады. Енді олар тақ болсын. Онда олар {1, 5, 9, 13, 17, 21, 25} немесе {3, 7, 11, 15, 19, 23} жиыны. Бірінші жиында тек уш жай сан, ал екінші жиында таңдап алынған алты санның бесеуі жай.

3. *ABC үшбұрышында BM медианасы жүргізілген. $\angle ABM = 40°$, ал $\angle CBM = 70°$ екені белгілі. $AB : BM$ қатынасын табыңдар.*

Жауабы: 2:1. Бірінші шешім. $\angle AMB > \angle CBM = 70° > (180°-\angle ABM-\angle AMB) = \angle BAM$ болғандықтан, BM медиана AB қабырғадан қысқа болады. M-нен әрі қарай BM-ді созып, одан $AB = BD$ болатындай D нүктесін алайық. Сонда ABD үшбұрышы, төбесіндегі бұрышы 40° болатын теңбүйірлі үшбұрыш. Сондықтан AD табанындағы бұрыштар 70°-тан болады. BCM мен DAM үшбұрыштарын қарастырайық. Осы үшбұрыштарда $\angle ADM = \angle CBM = 70°$, $\angle BMC = \angle DMA$ вертикал бұрыштар, $AM = CM$. Сондықтан осы үшбұрыштар тең, сондықтан $BM = MD$. Яғни BM кесіндісі BD кесіндісінің жартысына тең, ал $BD = AB$. Екінші шешім. BC — ABM үшбұрышында B төбесіндегі сыртқы бұрыштың биссектрисасы екенін байқайық. Сондықтан $AB{:}BM = AC{:}CM = 2$.

4. *Теріс емес әр түрлі a, b, c сандары $a^2+b^2 = c^2+ab$ шартын қанағаттандырады. $c^2+ab < ac+bc$ екенін дәлелдеңдер.*

Шешуі. Жалпылықты қарамай-ақ, $a < b$ деп алсақ болады. Сонда $c^2+ab < ac+bc \Leftrightarrow (c-b)(c-a) < 0 \Leftrightarrow a < c < b$. Соңғы теңсіздікті қарсы жору арқылы дәлелдейік. $c \le a$ болсын деп алайық. Сонда $c^2+ab \le a^2+ab < a^2+b^2$ — қарама-қайшылық. Егер $c \ge b$ деп алсақ, $c^2+ab \ge b^2+ab > b^2+a^2$ — тағы да қарама-қайшылық.

5. *$n\times n$ квадраттың шаршылары келесі шарт орындалатындай қара және ақ түстерге боялған: екі баған мен екі жолдың қиылысуынан пайда болған төрт шаршылардың ешқайсысы барлығы бір түсті бола алмайды. n-нің ең үлкен мүмкін мәні қандай?*

Қ	А	Қ	А
Қ	Қ	А	А
А	Қ	Қ	А
А	А	А	Қ

Шешуі. $n = 4$ үшін мысал оң жақтағы суретте көрсетілген. Енді қарсы жору арқылы 5×5 квадратты есеп шарты орындалатындай етіп бояуға болмайтынын дәлелдейік. Егер қатарда қара шаршы саны ақ шаршы санынан көп болса, онда ондай қатарды *басымды қара* қатар дейміз, кері жағдайда *басымды ақ* дейміз. Бес қатарда үш басымды ақ, немесе үш басымды қара қатар табылады. Жалпылықты сақтамай-ақ, үш басымды қара қатар табылсын дейік. Оларда кемінде тоғыз қара шаршы бар.

Енді тек осы қатарларды қарастырамыз. Егер қандай-да бір бағанда (оны А баған деп атайық) үш қара шаршы тұрса, онда қалған төрт бағанға кемінде алты қара шаршы келеді. Сондықтан қандай-да бір бағанда (оны Б деп атайық) екі қара шаршы бар. Онда А және Б бағандары мен Б-ның қара шаршысы орналасқан екі қатарды алсақ, қарама-қайшылық аламыз.

Яғни, әр бағанда қара шаршы саны екіден көп емес. Бірақ ондай жағдай кемінде төрт бағанда екі қара шаршы бар болған жағдайда орындалады. Ал үш шаршыдан екі шаршыны қара түске бояу әдіс саны тек үшке тең болғандықтан, онда қандай-да бір екі бағанда ондай бояу бірдей болады да, біз тағы да қара-қайшылыққа келеміз.