VII Oilerio olimpiados pirmojo etapo 1 turas

Uždavinių sprendimai

1. *Raskite tris nesuprastinamas trupmenas, kurių skaitikliai ir vardikliai nelygūs vienam ir kurių suma yra sveikasis skaičius, o trupmenų, atvirkštinių joms suma – taip pat sveikasis skaičius.*

<u>Sprendimas</u>. Pavyzdžiui, 11/2, 11/6, 11/3. <u>Pastaba</u>. Sudarytojai, suprantama, turėjo galvoje, kad trupmenos turi būti skirtingos. Bet kadangi tai nebuvo aiškiai nusakyta sąlygoje, užskaitomi ir atsakymai, kuriuose yra lygių trupmenų, pavyzdžiui, –1/3, –1/3, –1/3; 5/2, 5/4, 5/4 ir pan.

2. *Iš natūraliųjų skaičių nuo 1 iki 25 Rasa išsirinko šešis tokius, kad bet kurių dviejų skirtumas dalijasi iš 4. Kiek daugiausiai pirminių skaičių Rasa galėjo išsirinkti?*

<u>Atsakymas</u>: penki. <u>Pirmas sprendimas</u>. Dviejų skaičių skirtumas dalijasi iš 4 tada ir tik tada, kai tų skaičių liekanos, gaunamos dalijant iš 4, yra lygios. Išsirašykime visus pirminius skaičius, mažesnius už 25, ir jų liekanas, gautas dalijant iš 4: 2-2, 3-3, 5-1, 7-3, 11-3, 13-1, 17-1, 19-3, 23-3. Daugiausia — penki — pirminiai skaičiai, kurių liekana lygi 3, o tai ir atsako į duotą klausimą. <u>Antras sprendimas</u>. kadangi 5–2 = 3,13–11 = 19–17 =2, iš pirminių skaičių grupių {2, 3, 5}, {11, 13}, {17, 19} Rasa galėjo išrinkti ne daugiau kaip po vieną skaičių. Iš pirminių skaičių, mažesnių už 25, į šias grupes neįeina tik skaičiai 7 ir 23, todėl tarp Rasos pasirinktų skaičių, pirminių buvo ne daugiau kaip penki. Pavyzdys, kuomet jų lygiai penki, duotas pirmajame sprendime.

3. *Išvesta trikampio ABC pusiaukraštinė BM. Yra žinoma, kad* $\angle ABM = 40°$, *o* $\angle CBM = 70°$. *Raskite santykį AB:BM.*

<u>Atsakymas</u>: 2. <u>Pirmas sprendimas</u>. Papildykime trikampį ABC iki lygiagretainio $ABCD$. Kadangi lygiagretainio įstrižainės susikirsdamos dalija viena kitą pusiau, tai taškas M yra jų susikirtimo taškas ir $BD = 2BM$. Iš kitos pusės, $\angle BDA = \angle CBD = 70°$, o $\angle BAD = 180° – \angle BDA – \angle ABD = 70° = \angle BDA$, iš kur $AB = BD = 2BM$ ir $AB:BM = 2BM:BM = 2$. <u>Antras sprendimas</u>. Pastebėkime, kad BC — trikampio ABM kampo B priekampio pusiaukampinė. Todėl $AB:BM = AC:CM = 2$.

4. *Skirtingi neneigiami skaičiai a, b, c yra tokie, kad* $a^2+b^2 = c^2+ab$. *Įrodykite, kad* $c^2+ab < ac+bc$.

<u>Sprendimas</u>. Nemažindami bendrumo, laikykime, kad $a < b$. Tuomet $c^2+ab < ac+bc \Leftrightarrow (c–b)(c–a) < 0 \Leftrightarrow a < c < b$. Įrodykime pastarąją nelygybę prieštaros būdu. Tarkime, kad $c \le a$. Tuomet $c^2+ab \le a^2+ab < a^2+b^2$ — Gauname prieštarą. Tarkime, kad $c \ge b$. Tuomet $c^2+ab \ge b^2+ab > b^2+a^2$ — vėl gauname prieštarą.

5. *Kvadrato* $n\times n$ *langeliai nuspalvinti juodai ir baltai su tokia sąlyga, kad jokie keturi langeliai, esantys dviejų eilučių ir dviejų stulpelių susikirtime, negali būti vienos spalvos. Kokia didžiausia galima n reikšmė?*

J	B	J	B
J	J	B	B
B	J	J	B
B	B	B	J

<u>Sprendimas</u>. Pavyzdys, kai $n = 4$ parodytas piešinyje. Prieštaros būdu įrodysime, kad kvadrato 5×5 tokiu būdu nuspalvinti neįmanoma. Eilutę pavadinkime *labiau juoda*, jeigu joje juodų kvadratėlių daugiau, negu baltų, ir *labiau balta* priešingu atveju. Iš penkių eilučių atsiras arba trys labiau juodos, arba trys labiau baltos; nesumažindami bendrumo laikykime, kad yra trys labiau juodos eilutės. Jose yra mažiausiai devyni juodi langeliai.

Dabar nagrinėkime tik šias eilutes. Jeigu kažkuriame stulpelyje (pavadinkime jį A) yra trys juodi langeliai, tai likusiems keturiems stulpeliams teks mažiausiai šeši juodi langeliai. Todėl atsiras langelis (pavadinkime jį Б), kuriame yra du juodi langeliai. Tuomet, paėmę stulpelius A ir B ir dvi eilutes, kuriose yra du juodi stulpelio B langeliai, gausime prieštarą.

Reiškia, kiekviename stulpelyje yra ne daugiau kaip du juodi langeliai. Bet tai įmanoma tiktai tada, kuomet bent keturiuose stulpeliuose yra po du juodus langelius. Kadangi yra trys būdai nuspalvinti du iš trijų langelių juodai, kažkuriuose dviejuose stulpeliuose nuspalvinimas bus vienodas ir mes vėl gauname prieštarą.