**Леонард Эйлер атындағы VIII олимпиаданың**

**дистанционды кезеңінің бірінші туры**

**Осы турдың есептері Удмуртияның Анисимов олимпиадасында беріледі. Бұл олимпиадада Удмуртияның оқушылары қатыса алмайды.**

**1.** Қабырғалары 11, 9, 7 және 5 болатын квадраттар суреттегідей орналасқан. Сонда сұр түсті аудандардың қосындысы қара түсті аудандардың қосындысынан екі есе үлкен болып шыққан. Ақ түсті аудандардың қосындысын табыңыздар.

Жауабы. 42. Шешуі. Ақ аудандардың қосындысы *x* ал қара аудандардың қосындысы *y* болсын. Онда ақ жіне қара аудандардың қосындысы  болады, ал ақ және сұр аудандардың қосындысы  болады. Сонда екінші теңдеуден  екенін табамыз. Демек, .

**2.** Су асты патшалығында тұратын сегізаяқтардың тек 6, 7 немесе 8 аяғы ғана бар. 7 аяғы бар сегізаяқтар әрқашан да өтірік айтады, қалғандары әрқашан шындықты айтады. Төрт сегізаяқтарды кездестірген кезде оның Көгі айтты: «біздің барлығымыздың аяқтар саны 25-ке тең», Жасылы қарсы шығып: «жоқ, барлығы 26 аяқ» деді, ал Қызылы «барлығы 27», ал Сарысы «28 аяқ» деді. Әр сегізаяқта шынында қанша аяқтан бар?

Жауабы. Қызылда 6 аяқ, қалғандарында 7 аяқтан. Шешуі. Егер барлығы өтірік айтса, онда барлығы өтірікші деген сөз. Демек оларда барлығы 28 аяқ болу қажет. Яғни Жасыл дұрыс айтты. Қарама-қайшылық. Яғни осы төртеуінің арасында шындықты айқан сегізаяқ бар және де сондай сегізаяқ (шындықты айтқан) жалғыз ғана, өйткені кез келген екі айтылымдар бір-біріне қара-қайшы. Сондықтан үш сегізаяқта 7 аяқтан бар, ал біреуінде 6 немесе 8 аяқ бар. Бірақ шын айтқан сегізаяқта 8 аяқ болуы мүмкін емес, өйткені ешқайсысы 29 аяқ бар деп айтпады. Демек, шын айтқан сегізаяқта 6 аяқ бар, және ол 27-ні айтқан Қызыл сегізаяқ.

**3.** *ABC* үшбұрышында *M* нүктесі ⎯ *AC* қабырғасының ортасы, және *BC* = 2*AC*/3, ∠*BMC*= 2∠*ABM* екені белгілі. *AM*/*AB* қатынасын табыңыздар.

Жауабы. . Шешуі.  болсын. Онда , , , осыдан  екені шығады. Сонда  медиана  қабырғасының жартысына тең болғаны. Демек, . Егер  деп алсақ, онда , ,  екені шығады. -ді -ға бөле отырып, бізге керек жауапты аламыз.

**4.** Қабырғасы 2015 болатын тор квадраттан тор бойымен қабырғасы 10 болатын бірнеше квадрат қиып алды. Үлкен квадраттың қалған бөлігінен:

а) қабырғасы 1 және 10 болатын бір тіктөртбұрыш қиып алуға болатынын;

б) қабырғасы 1 және 10 болатын бес тіктөртбұрыш қиып алуға болатынын дәлелдеңіздер.

Шешуі. Есептің бірден екінші б) бөлігін дәлелдейік.  квадраттың көлденең жатқан ең төмендегі және ең сол жақтағы  тіктөртбұрышын қарастырайық. Егер сол тіктөртбұрыштың ең шеткі оң шаршысы қиылмаған болса, онда сол тіктөртбұрыштың қалған 9 шаршысы да қиылмаған болады. Енді, сол жақтан санағандағы 10-шы бағанды қарастырайық.  санын 10-ға бөлгенде 5 қалдық қалғандықтан, сол бағанда кемінде 5 шаршы қиылмаған болады. Демек, сол шаршылардан солға қарай  тіктөртбұрыштарын қиып алуға болады, ал олардың саны 5-тен кем емес.

**5.** Екі натурал *a* және *b* сандарының қосындысы да, көбейтіндісі де натурал сандардың квадраттары екені белгілі. |16*a*–9*b|* саны ⎯ жай сан емес екенін дәлелдеңіз.

Шешуі. Егер 16*a*−9*b* = 0 болса, онда есеп шарты айқын. Ары қарай 16*a*−9*b* ≠ 0 деп санайық.

*d* = ЕҮОБ(*a*, *b*) болсын. Ондай болса қандай бір өзара жай *m* және *n* сандары үшін *a* = *dm*, *b* = *dn* болады. Онда *ab* = *d*2*mn* = *c*2. Ал *m* және *n* сандарының ортақ бөлгіштері болмағандықан, ол сандардың әрқайсысын жай сандардың көбейтіндісі ретінде келтіргенде, әр жай сан жұп дәрежеде болады. Демек, *m* және *n* натурал сандардың квадраттары: *m* = *u*2, *n* = *v*2.

Енді *d* > 1 болсын. Онда |16*a*−9*b*| = *d*|((4*u*)2−(3*v*2))| = *d*(4*u*+3*v*)|(4*u*−3*v*)|. Ол құрама сан, өйткені *d* > 1 және 4*u*+3*v* > 1.

Ал *d* = 1 болса, онда |16*a*−9*b*| = (4*u*+3*v*)|(4*u*−3*v*)|. Егер |4*u*−3*v*| ≠ 1, онда есеп щарты дәлелденді. Кері жағдайда 4*u*−3*v* = ±1 болу керек, яғни 4*u* = 3*v*±1. Есеп шарты бойынша 16(*a*+*b*) = 16*f*2 = 16*u*2+16*v*2 = (3*v*±1)2+16*v*2 = 25*v*2±6*v*+1. Бірақ толық квадрат болып келген 25*v*2 = (5*v*)2 санының оған көрші (5*v*±1)2 квадраттар арасындағы ең кіші қашықтық (5*v*)2−(5*v*−1)2 = 10*v*−1 санына тең, ал ол 6*v*+1 санынан үлкен. Сондықтан (4*f*)2 = 16*f*2 саны толық квадрат бола алмайды – қарама-қайшылық. Сонымен, 4*u*−3*v* = ±1 жағдайы мүмкін емес.