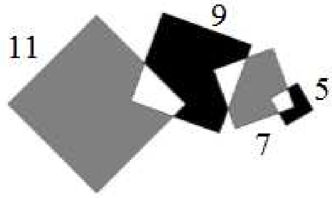
Леонард Эйлер атындағы VIII олимпиаданың дистанционды кезеңінің бірінші туры

Осы турдың есептері Удмуртияның Анисимов олимпиадасында беріледі. Бұл олимпиадада Удмуртияның оқушылары қатыса алмайды.

1. Қабырғалары 11, 9, 7 және 5 болатын квадраттар суреттегідей орналасқан. Сонда сұр түсті аудандардың қосындысы қара түсті аудандардың қосындысынан екі есе үлкен болып шыққан. Ақ түсті аудандардың қосындысын табыңыздар.



<u>Жауабы</u>. 42. <u>Шешуі</u>. Ақ аудандардың қосындысы x ал қара аудандардың қосындысы y болсын. Онда ақ жіне қара аудандардың қосындысы $9^2+5^2=106=x+y$ болады, ал ақ және сұр аудандардың қосындысы $11^2+7^2=170=x+2y$ болады. Сонда екінші теңдеуден $y=64$ екенін табамыз. Демек, $x=106-y=42$.

2. Су асты патшалығында тұратын сегізаяқтардың тек 6, 7 немесе 8 аяғы ғана бар. 7 аяғы бар сегізаяқтар әрқашан да өтірік айтады, қалғандары әрқашан шындықты айтады. Төрт сегізаяқтарды кездестірген кезде оның Көгі айтты: «біздің барлығымыздың аяқтар саны 25-ке тең», Жасылы қарсы шығып: «жоқ, барлығы 26 аяқ» деді, ал Қызылы «барлығы 27», ал Сарысы «28 аяқ» деді. Әр сегізаяқта шынында қанша аяқтан бар?

<u>Жауабы</u>. Қызылда 6 аяқ, қалғандарында 7 аяқтан. <u>Шешуі</u>. Егер барлығы өтірік айтса, онда барлығы өтірікші деген сөз. Демек оларда барлығы 28 аяқ болу қажет. Яғни Жасыл дұрыс айтты. Қарама-қайшылық. Яғни осы төртеуінің арасында шындықты айқан сегізаяқ бар және де сондай сегізаяқ (шындықты айтқан) жалғыз ғана, өйткені кез келген екі айтылымдар бір-біріне қара-қайшы. Сондықтан үш сегізаяқта 7 аяқтан бар, ал біреуінде 6 немесе 8 аяқ бар. Бірақ шын айтқан сегізаяқта 8 аяқ болуы мүмкін емес, өйткені ешқайсысы 29 аяқ бар деп айтпады. Демек, шын айтқан сегізаяқта 6 аяқ бар, және ол 27-ні айтқан Қызыл сегізаяқ.

3. ABC үшбұрышында M нүктесі — AC қабырғасының ортасы, және $BC = 2AC/3$, $\angle BMC = 2\angle ABM$ екені белгілі. AM/AB қатынасын табыңыздар.

Жауабы. $\dfrac{AM}{AB}=\dfrac{3}{2\sqrt{5}}$. Шешуі. $\angle ABM=\alpha$ болсын. Онда $\angle BMC=2\alpha$, $\angle BMA=180°-2\alpha$, $\angle BAM=180°-\angle ABM-\angle AMB=\alpha=\angle ABM$, осыдан $BM=AM=MC$ екені шығады. Сонда BM медиана AC қабырғасының жартысына тең болғаны. Демек, $\angle ABC=90°$. Егер $BM=4m$ деп алсақ, онда $AC=6m$, $AM=3m$, $AB=\sqrt{36m^2-16m^2}=2m\sqrt{5}$ екені шығады. AM-ді AB-ға бөле отырып, бізге керек жауапты аламыз.

4. Қабырғасы 2015 болатын тор квадраттан тор бойымен қабырғасы 10 болатын бірнеше квадрат қиып алды. Үлкен квадраттың қалған бөлігінен:

а) қабырғасы 1 және 10 болатын бір тіктөртбұрыш қиып алуға болатынын;

б) қабырғасы 1 және 10 болатын бес тіктөртбұрыш қиып алуға болатынын дәлелдеңіздер.

Шешуі. Есептің бірден екінші б) бөлігін дәлелдейік. 2015×2015 квадраттың көлденең жатқан ең төмендегі және ең сол жақтағы 1×10 тіктөртбұрышын қарастырайық. Егер сол тіктөртбұрыштың ең шеткі оң шаршысы қиылмаған болса, онда сол тіктөртбұрыштың қалған 9 шаршысы да қиылмаған болады. Енді, сол жақтан санағандағы 10-шы бағанды қарастырайық. 2015 санын 10-ға бөлгенде 5 қалдық қалғандықтан, сол бағанда кемінде 5 шаршы қиылмаған болады. Демек, сол шаршылардан солға қарай 1×10 тіктөртбұрыштарын қиып алуға болады, ал олардың саны 5-тен кем емес.

5. Екі натурал a және b сандарының қосындысы да, көбейтіндісі де натурал сандардың квадраттары екені белгілі. $|16a-9b|$ саны — жай сан емес екенін дәлелдеңіз.

Шешуі. Егер $16a-9b=0$ болса, онда есеп шарты айқын. Ары қарай $16a-9b\neq 0$ деп санайық.

$d=\text{ЕҮОБ}(a, b)$ болсын. Ондай болса қандай бір өзара жай m және n сандары үшін $a=dm$, $b=dn$ болады. Онда $ab=d^2mn=c^2$. Ал m және n сандарының ортақ бөлгіштері болмағандықан, ол сандардың әрқайсысын жай сандардың көбейтіндісі ретінде келтіргенде, әр жай сан жұп дәрежеде болады. Демек, m және n натурал сандардың квадраттары: $m=u^2$, $n=v^2$.

Енді $d>1$ болсын. Онда $|16a-9b|=d|((4u)^2-(3v^2))|=d(4u+3v)|(4u-3v)|$. Ол құрама сан, өйткені $d>1$ және $4u+3v>1$.

Ал $d=1$ болса, онда $|16a-9b|=(4u+3v)|(4u-3v)|$. Егер $|4u-3v|\neq 1$, онда есеп щарты дәлелденді. Кері жағдайда $4u-3v=\pm1$ болу керек, яғни $4u=3v\pm1$. Есеп шарты бойынша $16(a+b)=16f^2=16u^2+16v^2=(3v\pm1)^2+16v^2=25v^2\pm6v+1$. Бірақ толық квадрат болып келген $25v^2=(5v)^2$ санының оған көрші $(5v\pm1)^2$ квадраттар арасындағы ең кіші қашықтық $(5v)^2-(5v-1)^2=10v-1$ санына тең, ал ол $6v+1$ санынан үлкен. Сондықтан $(4f)^2=16f^2$ саны толық квадрат бола алмайды – қарама-қайшылық. Сонымен, $4u-3v=\pm1$ жағдайы мүмкін емес.