Первый тур дистанционного этапа XI олимпиады имени Леонарда Эйлера

Решения задач

1. *Таблица 70×70 заполнена числами от 1 до 4900: в первой строке слева направо выписаны числа от 1 до 70 в порядке возрастания; во второй строке точно так же выписаны числа от 71 до 140, и т.д.; в последней строке слева направо выписаны числа от 4831 до 4900. Можно ли в этой таблице найти такую клеточку, что сумма пяти чисел, находящихся в ней и четырёх клеточках, соседних с ней по сторонам, равна 2018?* (Автор задачи — А. Солынин)

Ответ. Нельзя. Решение. Из построения понятно, что если в клеточке записано число x, то сверху от него записано число x–70, снизу — число x+70, слева — число x–1, справа — число x+1. Сумма пяти этих чисел равна $5x$, то есть делится на 5, а число 2018 на 5 не делится.

2. *За круглым столом сидят 100 человек. Каждый из них либо рыцарь, либо лжец, либо чудак. Рыцарь всегда говорит правду, лжец всегда лжет. Чудак говорит правду, если слева от него сидит лжец; ложь, если слева от него сидит рыцарь; все что угодно, если слева от него сидит чудак. Каждый сказал: «Справа от меня сидит лжец». Сколько за столом лжецов? Перечислите все возможные ответы и докажите, что других нет.* (В. Мигрин)

Ответ. 0 или 50. Решение. *Оценка*. Допустим, среди сидящих есть лжец. Тогда справа от него — рыцарь или чудак. Любой из них в этой ситуации скажет правду, значит, справа от него — снова лжец и т.д., то есть лжецов — ровно 50. *Примеры*. На 0 лжецов: за столом одни чудаки, и каждый может соврать, что справа от него сидит лжец. На 50 лжецов: за столом на четных местах сидят лжецы, а на нечетных — чудаки или рыцари (в любом раскладе).

3. *В трапеции ABCD боковая сторона AB равна диагонали BD. Точка M — середина диагонали AC. Прямая BM пересекает отрезок CD в точке E. Докажите, что BE = CE.* (А. Кузнецов)

Решение. Достроим треугольник ABC до параллелограмма $ABCF$. Его диагональ BF проходит через точку M, а, значит, и через точку E. Так как $CF = AB = BD$, и прямая CF будучи параллельной прямой AB, не параллельна прямой BD, $BCFD$ — равнобедренная трапеция. Ее диагонали BF и CD образуют равные углы с основанием BC. Следовательно, треугольник BEC — равнобедренный с основанием BC, что и требовалось доказать.

4. *На парковке стоят машины. Среди них есть машины марок «Тойота», «Хонда», «Шкода», а также машины других марок. Известно, что не «Хонд» в полтора раза больше, чем не красных машин; не «Шкод» в полтора раза больше, чем не желтых машин; наконец, не «Тойот» вдвое меньше, чем красных и желтых машин вместе. Докажите, что «Тойот» не меньше, чем «Хонд» и «Шкод» вместе.* (А. Солынин)

Первое решение. Пусть на стоянке всего C машин, среди которых T «Тойот», H «Хонд» и S «Шкод», а также X красных и Y желтых. По условию $C–H = 3(C–X)/2$, $C–S = 3(C–Y)/2$, $C–T = (X+Y)/2$. Сложив два первых равенства, после приведения подобных получаем: $–H–S = C–3(X+Y)/2$, откуда $H+S = –C+3(C–T)$ $\Leftrightarrow 3T+H+S = 2C$. Заменив в правой части последнего равенства C на $H+S+T$, мы не увеличим ее и получим неравенство $3T+H+S \geq 2H+2S+2T \Leftrightarrow T \geq H+S$, что и требовалось доказать. Второе решение. Так как красных и жёлтых машин вместе не больше, чем всего машин на стоянке, не «Тойот» на стоянке не больше половины от общего числа машин. Значит, «Тойот» — не меньше половины общего числа машин. Так как «Хонды» и «Шкоды» — явно не «Тойоты», их не больше половины от общего числа машин, откуда и следует утверждение задачи.

5. *Кузнечик начинает движение в левой верхней клетке квадрата 10×10. Он может прыгать на одну клетку вниз или вправо. Кроме того, кузнечик может из самой нижней клетки любого столбца перелететь в самую верхнюю клетку того же столбца, а из самой правой клетки любой строки перелететь в самую левую клетку той же строки. Докажите, что кузнечику понадобится хотя бы 9 перелетов, чтобы побывать на каждой клетке квадрата хотя бы по одному разу.* (Н. Власова)

Решение. Не совершая перелета, кузнечик может попасть из клетки K, где он находится, только в клетки прямоугольника, где K — левая верхняя клетка. Покрасим красным 10 клеток, лежащих на диагонали квадрата, идущей из правой верхней клетки в левую нижнюю. Прямоугольник, в левом верхнем углу которого находится красная клетка, не содержит других красных клеток. Поэтому, двигаясь только вниз или вправо, кузнечик не сможет попасть из одной красной клетки в другую, не совершив перелета, из чего и вытекает утверждение задачи.