**Первый тур дистанционного этапа XII олимпиады имени Леонарда Эйлера**

**Решения задач**

**1.** *Саша, Андрей и Оля выбрали по натуральному числу. Каждый из них умножил числа, выбранные двумя другими ребятами, на свое число и вычел меньшее произведение из большего. У Саши получилось 1, а у Андрея 121. Сколько могло получиться у Оли? Приведите все возможные варианты и докажите, что других нет.* (Автор задачи ⎯ А. Кузнецов)

Ответ. 120. Решение. Пусть числа Саши, Андрея и Оли равны *a*, *b*, *c* соответственно. Тогда по условию *a*⋅|*b*−*c*| = 1, *b*⋅|*a*−*c*| = 121. Из первого равенства *a* = 1, и тогда из второго *b*(*c*−1) = 121. Значит, либо *b* = 1, *c* = 122 (что противоречит первому равенству), либо *b* = 121, *c* = 2 (аналогично), либо, наконец, *b* = 11, *c* = 12. Поэтому у Оли получится *c*⋅(*b*−*a*) = 12⋅10 = 120.

**2.** *На окружности отмечено 150 серых, 151 бурая и 152 малиновых точки таким образом, что никакие две одноцветные точки не стоят рядом. Докажите, что найдётся бурая точка, у которой оба соседа ⎯ малиновые.* (С. Берлов)

Решение. Рассмотрим лишь серые и малиновые точки. Поскольку малиновых точек больше, между каким-то двумя малиновыми нет серой. Но рядом одноцветные точки стоять не могут, поэтому между этими двумя малиновыми точками на окружности стоит ровно одна бурая. Она-то и удовлетворяет условию.

**3.** *Клетчатый прямоугольник 100×101 (100 строк, 101 столбец) разбит на полоски 1×5 так, что в каждом столбце содержится ровно k вертикальных полосок. Чему может быть равно k?* (Ф. Петров)

Ответ. 20. Первое решение. Покрасим клетки 1-го, 6-го, 11-го, ..., 101-го столбца в красный цвет, а клетки 2-го, 7-го, 12-го, ..., 97-го столбца — в синий цвет. Красных столбцов на 1 больше, чем синих, а красных клеток на 100 больше, чем синих. Поскольку в каждом столбце находится ровно *k* вертикальных полосок, красных вертикальных полосок ровно на *k* больше, чем синих, и красных клеток в них занято на 5*k* больше, чем синих. А в каждой горизонтальной полоске поровну красных и синих клеток (по одной). Поэтому общее количество красных клеток на 5*k* больше общего количества синих. Таким образом, 100 = 5*k*, *k* = 20. Второе решение. Предположим, что *k* < 20. Тогда в каждом столбце ровно *n* = 100−5*k* клеток принадлежат горизонтальным полоскам. Заметим, что тогда в первом столбце начинаются ровно *n* горизонтальных полосок, и клетки именно этих *n* полосок присутствуют в столбцах со второго по пятый. Значит, клеток других горизонтальных полосок в них уже нет. Следовательно, ровно *n* полосок начинаются в шестом столбце и занимают также столбцы с седьмого по десятый, и так далее. Таким образом, столбцы должны разбиваться на пятерки подряд идущих столбцов, что невозможно, ибо их количество 101 не делится на 5.

**4.**Внутри трапеции *ABCD* (*BC* || *AD*), где *AD* = 2*BC*,взята точка *F,* для которой *AB = FB.* Точка *M* — середина отрезка *FD*.Докажите, что *CM* ⊥ *FA.* (Ф. Бахарев)

Первое решение. Пусть *N* — середина *AF*. Отрезок *NM* — средняя линия треугольника *AFD*, поэтому *NM* || *AD* || *BC* и *NM* = *AD*/2 = *BC*. Следовательно, *NBCM* — параллелограмм, и *BN* || *CM*. С другой стороны, отрезок *BN* является медианой равнобедренного треугольника *ABF*, поэтому *BN*⊥*AF*. Таким образом, *CM*⊥ *AF*, что и требовалось. Второе решение. Продолжим боковые стороны трапеции до пересечения в точке *K*. Из условия *AD* = 2*BC* следует, что *BC* — средняя линия треугольника *AKD*. Поэтому *KC* = *CD*. Теперь *CM* — средняя линия треугольника *KDF*, откуда *CM* || *KF*. С другой стороны, *BF* = *AB* = *BK*, поэтому треугольник *AFK* прямоугольный, где *KF*⊥*AF*. Таким образом, *CM*⊥*AF*, что и требовалось.

**5.** *Существуют ли 10000 последовательных семизначных чисел, которые можно разбить на 99 групп так, чтобы сумма всех чисел в каждой из групп была одной и той же?* (Д. Карпов)

Ответ. Нет. Решение. Заметим, что найдется группа *A*, содержащая не больше 101 числа, ибо 99⋅102 > 10000. С другой стороны, найдется группа *B* хотя бы из 102 чисел, ибо 99⋅101 < 10 000. Пусть первое из 10000 данных нам чисел равно *n*. Тогда cумма *SA* всех чисел из группы *A* не больше, чем *a* = (*n*+9999)+(*n*+9999–1)+…+(*n*+9999–100) = 101*n*+9999⋅101–50⋅101 = 101*n*+9949⋅101. Cумма же *SB* всех чисел из группы *B* не меньше, чем *b* = *n*+(*n*+1)+…+(*n*+101), что равняется 102*n*+101⋅51. Значит,
*SB*–*SA* ≥ *b*–*a* = *n*–9949⋅101+51⋅101 = *n*–9898⋅101 = *n*–999698 > 0, так как число 999698 — шестизначное, а число *n* — семизначное. Поэтому *SB* ≠ *SA*, откуда и вытекает ответ.