Първи тур на дистанционния етап
на XIII олимпиада «Леонард Ойлер»

1. Около кръгла маса седят 99 души, всеки от които е рицар (винаги казва истината) или лъжец (винаги лъже). Всеки от тях казал: «Поне един от съседите ми е лъжец.» Може ли рицарите да са точно 60?

2. Намерете всички двойки естествени числа $(a; b)$, за които

$$\text{НОД}(a; b) + \text{НОК}(a; b) = ab/2.$$

3. На дъска 8×8 са начертани 17 непресичащи се правоъгълника от по две полета всеки. Докажете, че има две полета с обща страна, принадлежащи на два различни правоъгълника.

4. Положителните числа a, b, c, d са такива, че $(a+b+2c)^2 > d$, $(b+c+2d)^2 > a$, $(c+d+2a)^2 > b$, $(d+a+2b)^2 > c$. Докажете, че $a+b+c+d > {}^1/_4$.

5. В триъгълник ABC ($\angle C = 90°$) на катета BC са отбелязани точки K и L, за които $\angle CAK = \angle KAL = \angle LAB$. На хипотенузата AB е отбелязана точка M, за която $ML = KL$. Докажете, че перпендикулярът от точката C към правата AK **не** разполовява отсечката ML.

Учениците, които предават решенията си на kortezov@gmail.com, трябва да изпишат решенията си в doc(x)-файл с разумен обем; ако има чертежи, те трябва да в самия файл като рисунка или снимка с ниска разделителна способност, но все пак да са достатъчно ясни. Начало на състезанието: 15.11.2020, 9:00. Краен срок за получаване на решенията: 15.11.2020, 15:00.