Первый тур дистанционного этапа XIII олимпиады имени Леонарда Эйлера

Решения задач

1. *За круглым столом сидели 99 человек, каждый из которых либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжёт. Каждый из них сказал: «Хотя бы один из двух моих соседей — лжец.» Могло ли среди них быть ровно 60 рыцарей?* (Фольклор)

Ответ. Могло. Решение. Сначала посадим за стол 39 лжецов. Потом в 21 промежуток между соседними лжецами посадим по два рыцаря, а в остальные 18 промежутков — по одному рыцарю. Нетрудно проверить, что такая рассадка удовлетворяет всем условиям задачи.

2. *Найдите все такие пары натуральных чисел a и b, что НОД$(a, b)+$НОК$(a, b) = ab/2$.* (И. Рубанов)

Ответ. $a = b = 4$; $a = 3$, $b = 6$; $a = 6$, $b = 3$. Первое решение. Пусть НОД$(a, b) = d$, $a = xd$, $b = yd$. Тогда НОК$(a, b) = xyd$ и уравнение принимает вид $d+xyd = xyd^2/2$, откуда $2xy+2 = xyd$. Значит, 2 делится на xy, то есть $xy = 1$ или $xy = 2$. В первом случае имеем $x = y = 1$, $d = 4$, то есть $a = b = 4$; во втором числа x и y — это 1 и 2 (в каком-то порядке), а $d = 3$, откуда a и b — это 3 и 6. Второе решение. Так как число $ab/2$ — целое, среди чисел a и b есть чётное. Пусть это число a. Тогда НОД$(a, b) = ab/2–$НОК(a, b) делится на b. Это возможно только если НОД$(a, b) = b$, то есть a делится на b. С другой стороны, $ab/2$ и НОК(a, b) кратны $a/2$, поэтому НОД$(a, b) = b$ делится на $a/2$. Таким образом, либо $a = b$, либо $a = 2b$. В первом случае получаем $2b = b^2/2$, то есть $a = b = 4$, во втором $b+2b = b^2$, то есть $a = 6$ и $b = 3$. Случай, когда b четно, разбирается аналогично и дает решение $a = 3$, $b = 6$.

3. *На шахматной доске 8х8 нарисованы по клеточкам 17 не налегающих друг на друга двухклеточных прямоугольников. Докажите, что на доске найдутся две имеющие общую сторону клетки, одна из которых лежит в одном из нарисованных прямоугольников, а другая — в другом.* (И. Рубанов)

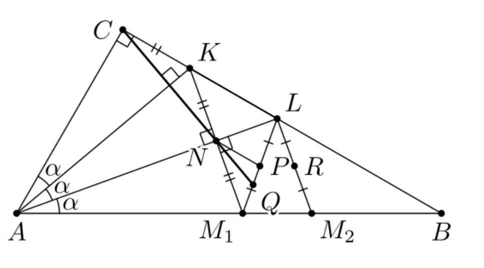
Решение. Разобьём доску на 16 квадратов 2х2. Отметим клетки нарисованных прямоугольников. Всего будет отмечено 34 клетки. Это больше, чем $2\cdot16$, поэтому найдется квадрат, в котором можно выбрать три отмеченные клетки. Центральная клетка образованного ими «уголка» не может лежать в одном нарисованном прямоугольнике с обеими его боковыми клетками, откуда и вытекает утверждение задачи.

4. *Положительные числа a, b, c, d таковы, что $(a+b+2c)^2 > d$, $(b+c+2d)^2 > a$, $(c+d+2a)^2 > b$, $(d+a+2b)^2 > c$. Докажите, что $a+b+c+d > 1/4$.* (И. Богданов)

Решение. Пусть d — наибольшее из четырех данных чисел (случаи, когда наибольшим является одно из трех других чисел, аналогичны). Тогда $(a+b+c+d)^2 \geq (a+b+2c)^2 > d \geq (a+b+c+d)/4$, откуда $a+b+c+d > 1/4$.

5. *В треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) на катете BC отмечены точки K и L такие, что $\angle CAK = \angle KAL = \angle LAB$. На гипотенузе AB отмечена точка M такая, что $ML = KL$. Докажите, что перпендикуляр из точки C на прямую AK* ***не*** *делит отрезок ML пополам.* (М. Кунгожин)

Решение. Проведем окружность ω с центром в точке L и радиусом KL. Она пересекает прямую AB в двух точках или касается ее. Рассмотрим первый случай (второй сводится к нему). Одной из двух точек пересечения будет точка M_1, симметричная точке K относительно прямой AL, так как она лежит на прямой AB и $LM_1 = LK$. При этом $\angle LM_1A = \angle AKL = \angle ACK+\angle CAK > 90°$. Поэтому угол LM_1A является внешним углом равнобедренного треугольника M_1LM_2, где M_2 — вторая точка пересечения ω с AB, и точка M_1 лежит между точками A и M_2.



Положим $\angle CAK = \angle KAL = \angle LAB = \alpha$, а через N обозначим середину основания KM_1 равнобедренного треугольника KLM_1. Из равенства прямоугольных треугольников ACK и ANK находим $\angle AKN = \angle AKC = 90°–\alpha$, откуда $\angle NM_1L = \angle NKL = \angle AKL–\angle AKN = (90°+\alpha)–(90°–\alpha) = 2\alpha$.

Пусть P — середина отрезка LM_1, R — середина отрезка LM_2, а Q — точка пересечения прямой CN с отрезком M_1L. Поскольку $\Delta ACK = \Delta ANK$, $KC = KN$, откуда $CN \perp AK$ и $\angle M_1NQ = \angle KNC = \angle KCN = \alpha < 2\alpha = \angle M_1NP$. Таким образом, точка Q лежит между точками M_1 и P, следовательно, прямая CQ не может проходить через точку P. Через точку R прямая CQ также не может проходить, поскольку $\angle CQL+\angle LQR < \angle CPL+\angle LPR < 180°$.