

Первый тур дистанционного этапа XVII олимпиады имени Леонарда Эйлера

Решения задач

1. Квантовый компьютер расходует 1 кВт/ч электроэнергии на каждую сделанную им операцию умножения или сложения. При этом он умеет хранить результаты промежуточных действий. Докажите, что для любых пяти хранящихся в компьютере чисел a, b, c, d, e можно найти сумму $ab+ac+ad+ae+bc+bd+be+cd+ce+de$, затратив не более 10 кВт/ч. (К. Кноп)

Решение. Искомую сумму за 10 операций можно получить, например, так. 1) $x_1 = a+b$. 2) $x_2 = x_1+c = a+b+c$. 3) $x_3 = d+e$. 4) $x_4 = x_2x_3 = (a+b+c)(d+e) = ad+ae+bd+be+cd+ce$. 5) $x_5 = cx_1 = ac+bc$. 6) $x_6 = ab$. 7) $x_7 = de$. 8) $x_8 = x_6+x_7 = ab+de$. 9) $x_9 = x_5+x_8 = ab+ac+bc+de$. 10) $x_{10} = x_4+x_9 = ab+ac+ad+ae+bc+bd+be+cd+ce+ed$.

2. Дано натуральное число n . n -операция состоит в прибавлении к натуральному числу его остатка от деления на n . При каких натуральных n , больших 1, из каждого натурального числа за несколько n -операций получается число, кратное n ? (А. Голованов)

Ответ. При $n = 2^k$, где k — натуральное число. Решение. Заметим, что если $m = an+r$, то разность чисел $m+r = an+2r$ и $2m = 2an+2r$ делится на n , и потому остатки от деления этих чисел на n одинаковы. Поэтому с точки зрения делимости на n , означающей равенство 0 остатка от деления на n , вместо n -операции можно рассматривать операцию умножения числа на 2. После k таких операций мы из числа m получим число $2^k m$. Если $n = 2^k$, то это число будет делиться на n . Значит, все степени двойки нам подходят. С другой стороны, из $m = 1$ будут получаться только степени двойки, и делимости ни на какие другие числа не будет.

3. Вершина C равнобедренной трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) лежит на основании AE прямоугольного равнобедренного треугольника ADE . Докажите, что прямая CD перпендикулярна прямой BE . (А. Кузнецов)

Первое решение. Заметим, что $\angle BDA = \angle CAD = 45^\circ$, поэтому $BD \perp AC$. Так как $BC \parallel AD \perp ED$, то в треугольнике BED прямые BC и EC содержат высоты. Следовательно, C — это точка пересечения его высот, и потому $CD \perp BE$.

Второе решение. Обозначим через O точку пересечения диагоналей трапеции $ABCD$. Треугольник ADE — равнобедренный, следовательно $\angle EAD = \angle AED = 45^\circ$. В силу равнобедренности трапеции $\angle ADB = \angle DAC = 45^\circ$, откуда $\angle AOD = \angle ADB + \angle DAC = 90^\circ$. В равнобедренном треугольнике ADE отрезок DO является высотой, следовательно DO — серединный перпендикуляр к AE . Точка B лежит на прямой DO , значит $BA = BE$ и $\angle BAE = \angle BEA$. Следовательно, $\angle BED = \angle BAD = \angle CDA$.

Пусть P — точка пересечения DC и BE . В треугольнике PED $\angle PED + \angle PDE = \angle CDA + \angle PDE = \angle ADE = 90^\circ$. Следовательно, $\angle EPD = 90^\circ$, что и требовалось доказать.

Третье решение. Построим треугольник ADE до квадрата $ADEF$. Пусть O — его центр. Так как $\angle ADB = \angle CAD = 45^\circ$, точка B лежит на DF . Кроме того, $OB = OC$ поскольку $ABCD$ — равнобедренная трапеция. При повороте вокруг точки O на 90° против часовой стрелки точки C и D переходят в B и E соответственно, поэтому прямая CD переходит в прямую BE . Отсюда следует, что $CD \perp BE$.

4. При каком наименьшем k на числовой прямой можно отметить k точек таким образом, чтобы для каждого натурального числа n от 1 до 100 нашлись две отмеченные точки, расстояние между которыми равно 2^n ? (И. Рубанов)

Ответ. При $k = 101$.

Первое решение. Пример. При $k = 101$ можно отметить точки $2, 2^2, \dots, 2^{101}$: для каждого n от 1 до 100 расстояние от 2^n до 2^{n+1} равно 2^n . Оценка. Пусть отмечено $k < 101$ точек. Для каждого n от 1 до 100 соединим ниткой две точки на расстоянии 2^n . Если есть точка, из которой выходит ровно одна нитка, удалим ее вместе с ниткой и будем делать так до тех пор, пока это возможно. Таким путем мы сможем удалить не больше 99 вершин, а, значит, и ниток. Поэтому, когда процесс удаления закончится, из каждой точки либо не будет выходить ниток, либо будет выходить не меньше двух ниток. Возьмем точку, из которой выходит хотя бы две нитки, и пойдем из нее по ниткам, идя каждый раз в точку, где мы еще не были, пока это возможно. Когда мы попадаем в еще не пройденную точку, мы можем идти дальше, так как из нее выходит еще хотя бы одна нитка. Так как точек конечное число, когда-то мы придем в точку, где уже были, и получим замкнутый маршрут. Возьмем в нем самую длинную нитку. Так как $2^k > 2^{k-1} + 2^{k-2} + \dots + 2^1$, эта нитка длиннее суммы всех остальных пройденных. Но тогда мы, выйдя из одного ее конца, не сможем прийти по остальным ниткам маршрута в другой. Получили противоречие с замкнутостью маршрута, доказывающее, что $k \geq 101$.

Замечание. Те, кто знаком с понятием графа, конечно, поняли, что рассуждение про веревочки — это доказательство, что если в графе ребер не меньше, чем вершин, то в нем есть цикл.

Второе решение. Докажем по индукции, что если среди расстояний между несколькими точками на числовой прямой встречаются n разных степеней двойки, то точек хотя бы $n+1$. При $n = 1$ это очевидно. Предположим, что это доказано для любых $m < n$ степеней двойки, и рассмотрим точки, среди расстояний между которыми есть n разных степеней двойки. Выберем из этих степеней наибольшую 2^c — пусть это расстояние между

точками A и B — а для каждой меньшей степени двойки 2^i отметим ровно одну пару точек на таком расстоянии. Назовём *ближними* точку A и все точки, в которые можно попасть из A , перемещаясь (возможно, несколько раз) из одной точки отмеченной пары в другую. Остальные точки назовём *дальними*. Точка B — дальняя, так как расстояние до неё, равное 2^c , больше любой суммы меньших степеней двойки. Если среди расстояний между ближними точками встречаются a степеней двойки, ближних точек (по предположению) не менее $a+1$. Все остальные $n-1-a$ степеней двойки среди наших расстояний, меньших 2^c , встречаются среди дальних точек. Следовательно, дальних точек не менее $n-a$, а всего точек не менее, чем $(a+1)+(n-a) = n+1$, что и требовалось.

5. В белой таблице размером 100×100 клеток окрашено в красный цвет N ($N > 0$) клеток таким образом, что количество красных клеток в любой фигуре, образованной объединением столбца и строки таблицы, делится на 3. Чему может быть равно N ? (С. Берлов)

Ответ. 300, 2·300, 3·300, ..., 33·300. Решение. Пример: $3n$ строк (или столбцов) красные, остальные — белые, $n = 1, 2, \dots, 33$. Условие делимости на 3 выполнено: если столбец и строка пересекаются по белой клетке, то в их объединении $3n$ красных клеток, а если по красной клетке — то $100+3n-1 = 3(n+33)$ красных клеток.

Покажем, что других вариантов нет. Рассмотрим 4 клетки, образующие прямоугольник со сторонами, параллельными сторонам таблицы. Сложим количества красных клеток в строках и столбцах, содержащих две противоположные вершины прямоугольника, и вычтем количества красных клеток в строках и столбцах, содержащих две оставшихся вершины. Результат будет равен разности количества красных клеток во второй паре вершин и количества красных клеток в первой паре вершин. Эта разность не больше 2 и не меньше -2. Кроме того, она делится на 3. Значит, она равна 0, то есть количества красных клеток в парах противоположных вершин равны.

Пусть нашлась строка S , где есть белая клетка B и красная клетка K . Тогда из доказанного следует, что столбец с клеткой B целиком белый, а с клеткой K — целиком красный. Аналогичные утверждения верны и для всех остальных клеток строки S . Таким образом, в этом случае каждый столбец таблицы состоит из клеток одного цвета. В противном случае каждая строка таблицы состоит из клеток одного цвета.

Пусть каждая из строк таблицы целиком красная или целиком белая, и красных строк — k штук. Целиком красной таблица быть не может, так как в этом случае число красных клеток в объединении строки и столбца не делится на 3. Значит, есть белая строка. В ее объединении с любым столбцом — k красных клеток. Значит, k делится на 3 и $N = 300 \cdot (k/3)$, что и требовалось доказать. Случай, когда каждый столбец таблицы состоит из клеток одного цвета, рассматривается аналогично.