# Первый тур дистанционного этапа XVIII олимпиады имени Леонарда Эйлера.

## Решения и критерии оценки.

**1.** *Из Ёлкино в Палкино с одинаковой скоростью и равными интервалами едут грузовики, другой транспорт там не ездит. Петя и Вася вышли из Палкина в разное время и шли прямо по дороге в Ёлкино с постоянными скоростями. Петя по дороге из Палкина в Ёлкино встретил 10 грузовиков, а Вася — 9 грузовиков. Мог ли Петя идти быстрее Васи?* (И. Рубанов)

**Ответ**. Мог. **Решение**. Пусть грузовики отправляются из Ёлкина каждые 10 минут. Пронумеруем их в порядке отправления. Пусть Петя выйдет из Палкина за минуту до прибытия туда первого грузовика, а в Ёлкино придет через минуту после отправления десятого, а Вася выйдет из Палкино через минуту после прибытия туда первого грузовика, а в Ёлкино придет через 9 минут после отправления десятого. Тогда Вася выйдет из Палкина на 2 минуты позже Пети, а придет в Ёлкино на 8 минут позже Пети, то есть потратит на весь путь на 6 минут больше. Значит, Петя шел быстрее Васи. При этом Петя встретил по пути 10 грузовиков: с первого по десятый, а Вася — 9 грузовиков, со второго по десятый. **Замечание**. Грузовики и мальчики считаются точками. Если мальчик вышел ровно в момент приезда грузовика и/или пришел в момент выезда грузовика, то считается, что он с этим грузовиком (этими грузовиками) встретился.

**Критерии оценки**. Только ответ — *0 баллов*.

Только указано, что Вася должен выходить чуть позже прихода грузовика, а Петя - чуть раньше или в момент прихода. Про приход Пети и Васи в Ёлкино ничего конкретного не сказано — *1 балл*.

Указано, что Вася должен выходить чуть позже прихода грузовика и приходить в Ёлкино чуть раньше отправления очередного грузовика, а Петя должен выходить чуть раньше или в момент прихода грузовика, а приходить в Ёлкино в момент отправления грузовика или чуть позже, при этом конкретный пример отсутствует или неверен (например, не учтено число грузовиков на трассе в момент выхода Пети/Васи) — *2 балла*.

**Типичные ошибки**. 1) Неверный пример, в котором не учтены грузовики, в момент выхода мальчика уже находящиеся на дороге из Ёлкино в Палкино. 2) Пример, правильность которого зависит от величины того или иного параметра (скорости грузовиков, длины дороги между Ёлкино и Палкино и т. п.), не указанной в решении. 3) При подсчете интервала между встречами мальчика с грузовиками считается, что сближение мальчика с грузовиком происходит со скоростью грузовика (что верно только если мальчик стоит на месте). *Во всех перечисленных случаях оценка в соответствии с приведенными выше критериями не превышает 2 баллов*.

**2.** *В каждой из 600 коробок лежит либо 5, либо 18, либо 22 шарика, причём все три типа присутствуют. Докажите, что можно выбрать несколько коробок, в которых суммарно ровно 2025 шариков.* (И. Богданов)

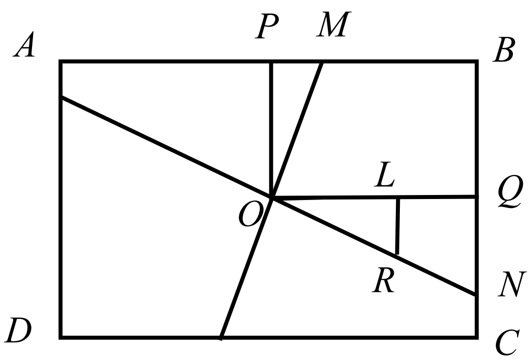
**Решение**. Отложим по одной коробке с 5, 18 и 22 шариками соответственно и покажем, что из оставшихся коробок можно выбрать несколько, в которых вместе $2025–5–18–22 = 1980$ шариков. Поскольку $1980 = 22\cdot 90 = 18\cdot 110 = 5\cdot 396$, если у нас среди оставшихся 597 коробок есть 396 коробок с 5 шариками, или 110 коробок с 18 шариками, или 90 коробок с 22 шариками, то задача решена. В противном случае у нас осталось не больше, чем 395+109+89 = 593 коробок — противоречие.

**Критерии оценки**. Допущены ошибки в вычислениях, не исказившие логику решения — *как правило, минус 1 балл*.

Замечено, что если убрать по одной коробке каждого вида, то получится число 1980, делящееся на 5, 18 и 22, дальнейшего содержательного продвижения нет — *1 балл*.

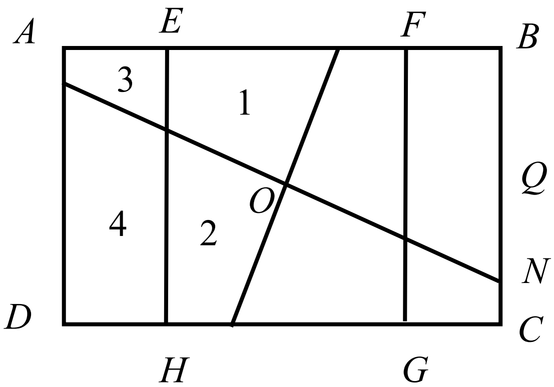
Решение покрывает не все возможные случаи количества коробок с 5, 18 и 22 шариками — *не выше 1 балла*.

**3.** *Через центр прямоугольника провели две взаимно перпендикулярные прямые, не параллельные его сторонам. Оказалось, что они делят прямоугольник на четыре части равной площади. Может ли этот прямоугольник не быть квадратом?* (И. Рубанов)




**Ответ**. Не может. **Первое решение**. Пусть $O$ — центр прямоугольника $ABCD$ площади $S$. Если две прямые делят $ABCD$ на части равной площади, то площадь каждой из них равняется $S/4$. Допустим, обе прямые пересекли одну и ту же сторону его (пусть $AB$) в точках $E$ и $F$. Если $EF = AB$, то на наших прямых лежат диагонали прямоугольника, и он — квадрат. Если $EF < AB$, то площадь треугольника $OEF$ меньше площади треугольника $OAB$, равной $S/4$, что невозможно.

Рассмотрим теперь случай, когда одна из наших прямых пересекает отрезок $AB$ в точке $M$, а другая — отрезок $BC$ в точке $N$. Пусть $P$ и $Q$ — середины отрезков $AB$ и $BC$ соответственно. Допустим, $ABCD$ — не квадрат и $AB > BC$. Так как прямые не параллельны сторонам прямоугольника, можно, не умаляя общности, считать, что $BN > BQ$, откуда $BM < BP$. Поскольку $OP = BC/2 < AB/2 = OQ$, на отрезке $OQ$ найдется такая точка $L$, что $OL = OP$. Рассмотрим прямоугольный треугольник $OLR$, где точка $R$ лежит на отрезке $ON$ (см. рисунок). Он равен треугольнику $OPM$ по стороне и двум углам. Поэтому площадь четырехугольника $OMBN$, который получается из прямоугольника $OPBQ$ удалением треугольника $OPM$ и добавлением треугольника $OQN$, больше площади прямоугольника $OPBQ$, равной $S/4$, поскольку $S_{OQN} > S_{OLR} = S_{OPM}$, что и завершает доказательство.




**Второе решение**. Впишем в прямоугольник $ABCD$ квадрат $EFGH$ с центром $O$ и стороной, равной короткой стороне прямоугольника (рисунок справа). Так как часть 1 этого квадрата совмещается с его частью 2 поворотом на 90 градусов вокруг точки $O$, площади частей 1 и 2 равны. Но очевидно, что площади четырехугольников 3 и 4 не равны, поэтому не равны и площади четырехугольников 1+3 и 2+4.

**Замечания**. 1) Если использовать подобие, в первом решении вместо рассмотрения треугольника $OLR$ достаточно заметить, что треугольник $OQN$ подобен треугольнику $OPM$ с коэффициентом $OQ/OP > 1$. 2) Второе решение не требует отдельного рассмотрения двух случаев из первого решения.

**Критерии оценки**. Только ответ — *0 баллов*.

Рассмотрен только случай, когда обе прямые пересекают одну сторону прямоугольника — *не выше 2 баллов*.

Рассмотрен только случай, когда прямые пересекают все четыре стороны прямоугольника— *не выше 4 баллов*.

В случае, когда прямые пересекают все четыре стороны прямоугольника, показано только, что точки их пересечения со сторонами прямоугольника — вершины ромба — *1 балл за этот случай*.

Без доказательства используется тот факт, что если у двух прямоугольных треугольников равны гипотенузы и площади (или гипотенузы и опущенные на них высоты), то эти треугольники равны — *снимается 1 балл*. Если при этом упущен один из двух возможных случаев равенства катетов треугольников — *снимается ещё один балл*.

Доказано, что у каждого из двух прямоугольных треугольников каждый катет равен одному из катетов другого треугольника, но из двух возможных случаев попарного равенства катетов рассмотрен только один — *снимается 1 балл*.

Факт, что две взаимно перпендикулярные прямые, проходящие через центр квадрата, делят квадрат на части равной площади, считался известным, за отсутствие его доказательства оценка не снижалась.

**4.** *На 2025 досках написали по натуральному числу. Разрешается проделывать такую операцию: на одной из досок вместо написанного на ней числа записать его куб, а на каждой из остальных досок вместо написанного на ней числа записать в три раза меньшее число, если оно является целым (если хотя бы одно из чисел после деления на 3 становится нецелым, операция невозможна!). Можно ли написать такие числа и проделать несколько (не меньше одной) операций так, чтобы после последней операции на каждой доске оказалось исходное число?* (А. Голованов, С. Берлов)

**Ответ**. Можно. **Решение**. Занумеруем доски: 1, 2, …, 2025 и будем искать подходящие числа в виде степеней тройки, а вместо самих степеней будем рассматривать их показатели $n_1$, $n_2$, …, $n_{2025}$. При возведении степени в куб ее показатель умножается на 3, а при делении на 3 уменьшается на 1. Проделаем последовательно 2025 операций, где при $k$-ой операции $k$-й показатель умножается на 3, а из остальных вычитается 1. Тогда перед $k$-ой операцией $k$-й показатель равняется $n_k–(k–1)$, сразу после нее — $3n_k–3(k–1)$, а затем из него $2025–k$ раз вычитается единица, так что в итоге получается $3n_k–3(k–1)–(2025–k)$. Решая уравнение $3n_k–3(k–1)–(2025–k) = n_k$, получаем натуральное число $n_k = k+1011$. Таким образом, если написать $k$-ой доске число $3^{k+1011}$, то после описанных выше 2025 операций на каждой доске окажется исходное число. То, что при этом после каждой операции все числа будут оставаться натуральными, очевидно.

**Критерии оценки**. За указание правильного набора чисел — *3 балла*, *плюс 2 балла* за описание правильного алгоритма применения операций к этому набору, а *из оставшихся 2 баллов* оценивается обоснование правильности этого алгоритма. Проверка правильности алгоритма только для нескольких чисел, сопровождаемая словами «и так далее», «далее аналогично» и т. п. обоснованием не является.

Доказано, что числа обязаны быть степенями тройки, дальнейшего содержательного продвижения нет — *1 балл*.

Только ответ «можно» — *0 баллов*.

**5.** *Из доски 100×100 вырезаны 4 угловых клетки. Какое наименьшее количество клеток надо ещё вырезать, чтобы из оставшейся части нельзя было бы вырезать квадрат 2×2?* (С. Берлов)

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| X | | | | | | | X |
| | X | | X | | X | | |
| | | | | | | X | |
| X | | X | | X | | | |
| | | | | | | X | |
| X | | X | | X | | | |
| | | | | | | X | |
| X | | X | | X | | | X |

**Ответ**. 2498. **Решение**. Оценка. Рассмотрим прямоугольник из двух первых столбцов доски, удалим из него 4 клетки, лежащие в нижней и верхней строках, и разобьем оставшийся прямоугольник 2×98 на 49 квадратов 2×2. В каждом из них должно быть вырезано хотя бы по одной клетке. То же верно для двух последних столбцов. Прямоугольник 96×100, образованный столбцами с 3-го по 98-й, можно разбить на 48×50 = 2400 квадратов 2×2. Поэтому в нем должно быть вырезано не меньше 2400 клеток. Таким образом, всего из доски должно быть вырезано не больше 2400+49×2 = 2498 клеток. Пример. Занумеруем строки и столбцы доски числами от 1 до 100, начиная с левого нижнего угла. В квадрате 98×98, образованном клетками, обе координаты которых не больше 98, вырежем все клетки, обе координаты которых нечетны (естественно, кроме клетки (1,1), которая уже вырезана). В 99-ой строке вырежем все клетки, лежащие в столбцах с четными номерами от 2 до 98, а в 99-м столбце — все клетки, лежащие в строках с четными номерами от 2 до 98. Нетрудно убедиться, что в каждом из квадратов 2×2 после этого будет хотя бы одна вырезанная клетка (на рисунке — аналогичный пример для доски 8×8). При этом из квадрата 98×98 будет вырезано $49^2$–1 = 2400 клеток, а из 99-й строки и 99-го столбца — 2×49 = 98 клеток, а всего 2498 клеток.

**Критерии оценки**. Только ответ — *0 баллов*.

Только оценка — *не выше 3 баллов*.

Только пример — *не выше 3 баллов*.

Получился ответ 2502, поскольку в подсчете учтены угловые клетки, остальное верно: *не снижать*.

Отсутствие формального обоснования примера, правильность которого очевидна, *оценки не снижает*, но если правильность не очевидна и не обоснована, то *пример, как правило, не засчитывается*.