

Первый тур дистанционного этапа XVIII олимпиады имени Леонарда Эйлера. Решения.

1. Из Ёлкино в Палкино с одинаковой скоростью и равными интервалами едут грузовики, другой транспорт там не ездит. Петя и Вася вышли из Палкина в разное время и шли прямо по дороге в Ёлкино с постоянными скоростями. Петя по дороге из Палкина в Ёлкино встретил 10 грузовиков, а Вася — 9 грузовиков. Мог ли Петя идти быстрее Васи? (И. Рубанов)

Ответ. Мог. **Решение.** Пусть грузовики отправляются из Ёлкина каждые 10 минут. Пронумеруем их в порядке отправления. Пусть Петя выйдет из Палкина за минуту до прибытия туда первого грузовика, а в Ёлкино придет через минуту после отправления десятого, а Вася выйдет из Палкина через минуту после прибытия туда первого грузовика, а в Ёлкино придет через 9 минут после отправления десятого. Тогда Вася выйдет из Палкина на 2 минуты позже Пети, а придет в Ёлкино на 8 минут позже Пети, то есть потратит на весь путь на 6 минут больше. Значит, Петя шел быстрее Васи. При этом Петя встретил по пути 10 грузовиков, с первого по десятый, а Вася — 9 грузовиков, со второго по десятый.

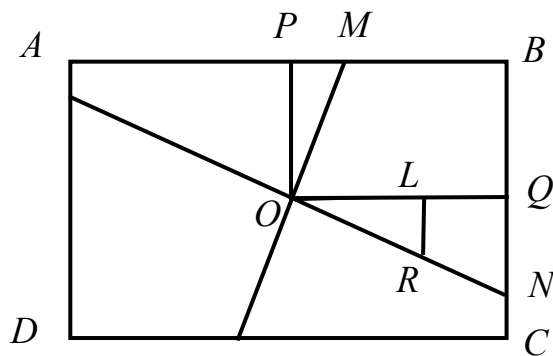
2. В каждой из 600 коробок лежит либо 5, либо 18, либо 22 шарика, причём все три типа присутствуют. Докажите, что можно выбрать несколько коробок, в которых суммарно ровно 2025 шариков. (И. Богданов)

Решение. Отложим по одной коробке с 5, 18 и 22 шариками соответственно и покажем, что из оставшихся коробок можно выбрать несколько, в которых вместе $2025 - 5 - 18 - 22 = 1980$ шариков. Поскольку $1980 = 22 \cdot 90 = 18 \cdot 110 = 5 \cdot 396$, если у нас среди оставшихся 597 коробок есть 396 коробок с 5 шариками, или 110 коробок с 18 шариками, или 90 коробок с 22 шариками, то задача решена. В противном случае у нас осталось не больше, чем $395 + 109 + 89 = 593$ коробок — противоречие.

3. Через центр прямоугольника провели две взаимно перпендикулярные прямые, не параллельные его сторонам. Оказалось, что они делят прямоугольник на четыре части равной площади. Может ли этот прямоугольник не быть квадратом? (И. Рубанов)

Ответ. Не может. **Решение.** Проведем рассуждение от противного. Пусть O — центр прямоугольника $ABCD$ площади S . Если две прямые делят $ABCD$ на части равной площади, то площадь каждой из них равняется $S/4$. Допустим, обе прямые пересекли одну и ту же сторону его (пусть AB) в точках E и F . Если $EF = AB$, то на наших прямых лежат диагонали прямоугольника, и он — квадрат. Если $EF < AB$, то площадь треугольника OEF меньше площади треугольника OAB , равной $S/4$, что невозможно.

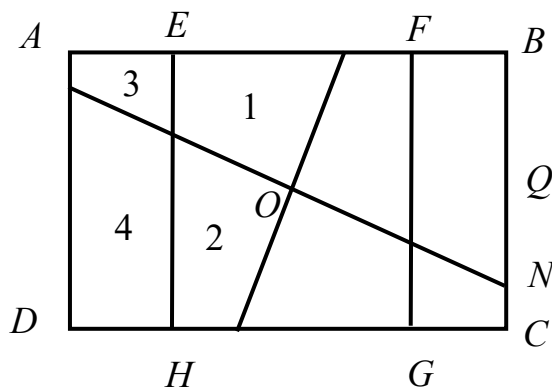
Рассмотрим теперь случай, когда одна из наших прямых пересекает отрезок AB в точке M , а другая — отрезок BC в точке N . Пусть P и Q — середины отрезков AB и BC соответственно. Допустим, $ABCD$ — не квадрат и $AB > BC$. Так как прямые не параллельны сторонам прямоугольника, можно, не умаляя общности, считать, что $BN > BQ$, откуда $BM < BP$. Поскольку $OP = BC/2 < AB/2 = OQ$, на отрезке OQ найдется такая точка L , что $OL = OP$. Рассмотрим прямоугольный треугольник OLR , где точка R лежит на отрезке ON (см. рисунок). Он равен треугольнику



OPM по стороне и двум углам. Поэтому площадь четырехугольника $OMBN$, который получается из прямоугольника $OPBQ$ удалением треугольника OPM и добавлением треугольника OQN , больше площади прямоугольника $OPBQ$, равной $S/4$, поскольку $S_{OQN} > S_{OLR} = S_{OPM}$, что и завершает доказательство.

Замечание. Решение написано так, чтобы не использовать подобие. Если использовать его, то вместо рассмотрения треугольника OLR достаточно заметить, что треугольник OQN подобен треугольнику OPM с коэффициентом $OQ/OP > 1$.

Еще короче второй абзац решения можно сделать, используя поворот. Впишем в прямоугольник $ABCD$ квадрат $EFGH$ с центром O , как на рисунке справа. Так как часть 1 этого квадрата совмещается с его частью 2 поворотом на 90 градусов вокруг точки O , площади частей 1 и 2 равны. Но очевидно, что площади четырехугольников 3 и 4 не равны, поэтому не равны и площади четырехугольников $1+3$ и $2+4$.



4. На 2025 досках написали по натуральному числу. Разрешается проделывать такую операцию: на одной из досок вместо написанного на ней числа записать его куб, а на каждой из остальных досок вместо написанного на ней числа записать в три раза меньшее число, если оно является целым (если хотя бы одно из чисел после деления на 3 становится нецелым, операция невозможна!). Можно ли написать такие числа и проделать несколько (не меньше одной) операций так, чтобы после последней операции на каждой доске оказалось исходное число? (А. Голованов, С. Берлов)

Ответ. Можно. **Решение.** Занумеруем доски: $1, 2, \dots, 2025$, и будем искать подходящие числа в виде степеней тройки, а вместо самих степеней будем рассматривать их показатели $n_1, n_2, \dots, n_{2025}$. При возведении степени в куб ее показатель умножается на 3, а при делении на 3 уменьшается на 1. Проведем последовательно 2025 операций, где при k -ой операции k -ый показатель умножается на 3, а из остальных вычитается 1. Тогда перед k -ой операцией k -ый показатель равняется $n_k - (k-1)$, сразу после нее — $3n_k - 3(k-1)$, а затем из него $2025-k$ раз вычитается единица, так что в итоге получается $3n_k - 3(k-1) - (2025-k)$. Решая уравнение $3n_k - 3(k-1) - (2025-k) = n_k$, получаем натуральное число $n_k = k + 1011$. Таким образом, если написать k -ой доске число 3^{k+1011} , то после описанных выше 2025 операций на каждой доске окажется исходное число.

5. Из доски 100×100 вырезаны 4 угловых клетки. Какое наименьшее количество клеток надо ещё вырезать, чтобы из оставшейся части нельзя было вырезать квадрат 2×2 ? (С. Берлов)

Ответ. 2498. **Решение.** Оценка. Рассмотрим прямоугольник из двух первых столбцов доски, удалим из него 4 клетки, лежащие в нижней и верхней строках, и разобьем оставшийся прямоугольник 2×98 на 49 квадратов 2×2 . В каждом из них должно быть вырезано хотя бы по одной клетке. То же верно для двух последних столбцов. Прямоугольник 96×100 , образованный столбцами с 3-го по 98-й, можно разбить на $48 \times 50 = 2400$ квадратов 2×2 . Поэтому в нем должно быть вырезано не меньше 2400 клеток. Таким образом, всего из доски должно быть вырезано не больше $2400 + 49 \times 2 = 2498$ клеток. Пример. Занумеруем строки и столбцы доски числами от 1 до 100, начиная с левого

нижнего угла. В квадрате 98×98 , образованном клетками, обе координаты которых не больше 98, вырежем все клетки, обе координаты которых нечетны (естественно, кроме клетки (1,1), которая уже вырезана). В 99-ой строке вырежем все клетки, лежащие в столбцах с четными номерами от 2 до 98, а в 99-м столбце — все клетки, лежащие в строках с четными номерами от 2 до 98. Нетрудно убедиться, что в каждом из квадратов 2×2 после этого будет хотя бы одна вырезанная клетка (на рисунке — аналогичный пример для доски 8×8). При этом из квадрата 98×98 будет вырезано $49^2 - 1 = 2400$ клеток, а из 99-й строки и 99-го столбца — $2 \times 49 = 98$ клеток, а всего 2498 клеток.

X							X
	X		X		X		
						X	
X		X		X			
						X	
X		X		X			
						X	
X		X		X			X