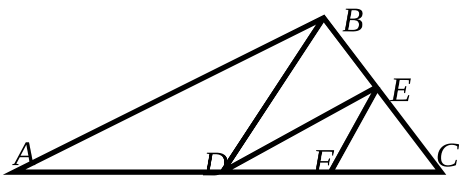
Леонард Эйлер атындағы VII олимпиаданың дистанционды кезеңінің екінші туры

Есептер шешімі

1. *a, b, c сандарының біреуі оң, біреуі теріс, біреуі нөлге тең. Егер $ab^2(a+c)(b+c) < 0$ екені белгілі болса, онда сандардың қайсысы теріс, қайсысы оң, қайсысы нөлге тең екенін анықтаңыз.*

Жауабы. $a > 0$, $b < 0$, $c = 0$. Шешуі. Егер a немесе b нөлге тең болса, онда көбейтінді нөлге тең болушы еді. Яғни c нөлге тең. Демек, есептегі берілген көбейтінді a^2b^3-қа тең. Ал $a^2 > 0$ болғандықтан, онда $b^3 < 0$. Ол деген сөз $b < 0$, осындан $a > 0$ екені шығады.

2. *ABC үшбұрышында BD биссектрисасы, BDC үшбұрышында DE биссектрисасы, ал DEC үшбұрышында EF биссектрисасы жүргізілген. Сонда BD мен EF түзулері параллель болып шыққан. ABC бұрышы BAC бұрышынан екі есе үлкен екенін дәлелдеңіздер.*



Шешуі. Есеп шартынан $\angle ABD = \angle EBD = \angle CEF = \angle DEF = \angle BDE$ екені шығады. Яғни, AB мен DE-ні BD қиғанда, пайда болатын ABD және BDE айқыш бұрыштары тең болады. Демек $AB \parallel DE$, осыдан $\angle BAC = \angle EDF = \angle EDB = \angle ABD = \angle ABC/2$. Ал дәлелдеу керегі осы еді.

3. *Вася 99 карточканың әрқайсысына бір саннан жазып (ол сандар ішінде бірдей сандар болуы мүмкін), әр карточканы санымен төмен қаратып шеңбер бойымен қойып шықты. Сосын ол Петяға, әр көрші тұрған екі карточкада қандай сан жазылғанын айтты (бірақ қай карточкада қай сан екенін айтпады). Осы айтылғандар бойынша Петя қай карточкада қандай сан жызылғанын дәл таба алмайтындай етіп, Вася өзіне керек сандар таңдап ала алады ма?*

Жауабы. Жоқ, таңдап ала алмайды. Шешуі. Петяға қандай-да бір карточкада қандай сан жазылғанын ғана табу жеткілікті екенін байқайық: сол карточкаға көрші тұрған карточкада қандай сан жазылғанын біліп алып, тағы сол сияқты одан әрі қарай жылжып, барлық карточканың әрқайсысында қандай сан жазылғанын біліп аламыз. Петяның солай біліп ала алатынын көрсетейік. Қатар келген үш карточканы қарастырайық. Алдыңғы екеуінде a және b сандары, ал соңғы екеуінде a және c сандары жазылғаны белгілі болсын. Егер b және c сандары әр түрлі, немесе $a = b$ болса, онда ортаңғы карточкада a саны жазылғаны түсінікті де, сонымен есеп шығады. Демек Петя, әр көрші карточкаларда бірдей a мен b жұптары жазылған уақытта ғана, карточкалардағы сандарды анықтай алмайды. Бірақ ондай жағдай мүмкін емес, өйткені a мен b жұптары ғана қайталана бергенде, барлық карточка саны жұп болу керек, ал 99 тақ сан.

4. *Есепті шығаруға кірісер алдында, Коля сағатқа қарап алды. Ол кезде сағат күндізгі 1-ден асқан болатын (бірақ сағат әлі екі болмаған). Есеп шығаруға дәл бір сағат жұмсағаннан кейін ол сағатқа тағы да қараған уақытта, сағаттың минут тілі мен сағат тілі арасындағы бұрыш өзгермегенін байқады. Сонда Коля есепті қандай уақытта шығара бастаған?*

Жауабы. 1 сағат $8^{2}/_{11}$ минутта немесе 1 сағат $40^{10}/_{11}$ минутта. Шешуі. Коля есеп шығарар алдында уақыт 1 сағат x минут болсын. Бір сағат уақыт аралығында минут тілі 6°, ал сағат тілі 0,5° бұрышқа бұрылғандықтан, онда сағат тілі сол уақытта 12 сағаттық бағытпен $30°+0{,}5x°$, ал минуттық тіл 12 сағаттық бағытпен $6x°$ бұрыш жасаған. Бір сағатта минуттық тіл бір толық айналым жасап, ал сағаттық тіл 30°-қа бұрылады. Есеп шартынан, минуттық тіл сағаттық тілдің бастапқы және соңғы қалпындағы бұрышты қақ бөлетін бағытта жататыны шығады. Сонда, егер минуттық тіл бұрыш ішінде жатса $6x° = ((30°+0{,}5x°)+(60°+0{,}5x°))/2$ теңдеуі орындалады, кері жағдайда $6x°–180° = ((30°+0{,}5x°)+(60°+0{,}5x°))/2$ теңдеуі орындалады. Осы екі теңдеуді шешіп, жоғарыдағы екі жауапты аламыз.

5. *Таңдап алынған санның әрқайсысы қалған таңдап алынған сандардың қандай-да бір үшеуінің қосындысына тең болатындай, кемінде қанша әр түрлі сан таңдап алуға болады?*

Жауабы. Жеті сан. Шешуі. *Мысал.* –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3. *Бағалау.* n — таңдап алынған сандардың ең үлкені болсын. Егер $n \le 0$ болса, онда қалған сандар да теріс болады, яғни кез келген екі санның қосындысы қосылғаштардың әрқайсысынан кіші болады (a мен b теріс болса, онда $a+b<a$, $a+b<b$), яғни n-ге тең бола алмайды. Сондықтан $n > 0$. Қосындысы n-ге тең үш санның ең үлкен екеуі оң сандар болу керек. Кері жағдайда n-нен кіші санды теріс екі сан азайтып тастайды. Демек, таңдап алынған сандар ішінде кемінде үш оң сан бар. Тағы сол сияқты таңдап алынған сандардың ең кішісін қарастырып, кемінде үш теріс сан бар екенін байқаймыз. Яғни таңдап алынған сандардың саны алтыдан кем емес.

Енді, алты $a < b < c < d < e < f$ сандары таңдап алынған деп санайық. Жоғарыда дәлелдегеннен $c < 0 < d$ екені шығады. Егер сандардың бәрінің таңбаларын қарама-қарсыға өзгертсек, онда теңсіздік кері жаққа орындалады. Сонда $d \le |c|$ деп санасақ болады. Бірақ осы жағдайда f-ті үш таңдап алынған санның қосындысы ретінде жазу мүмкін емес, өйткені $c+d+e \le e < f$.