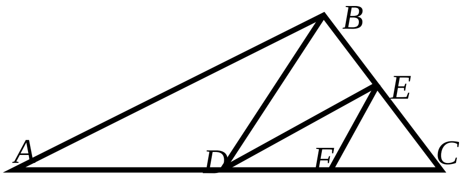
VII Oilerio olimpiados pirmojo etapo 2 turas

Uždavinių sprendimai

1. *Vienas iš skaičių a, b, c teigiamas, vienas — neigiamas, vienas — lygus 0. Nustatykite, kuris iš skaičių teigiamas, kuris – neigiamas ir kuris lygus 0, jeigu yra žinoma, kad* $ab^2(a+c)(b+c) < 0$.

Atsakymas. $a > 0$, $b < 0$, $c = 0$. Sprendimas. Jeigu nuliui būtų lygūs a arba b, tai sandauga sąlygoje taip pat būtų lygi nuliui. Todėl nuliui lygus c. Tuo būdu, sąlygoje esanti sandauga lygi a^2b^3. Kadangi $a^2 > 0$, tai $b^3 < 0$. Taigi, $b < 0$, iš čia $a > 0$.

2. *Trikampyje ABC išvesta pusiaukampinė BD, trikampyje BDC — pusiaukampinė DE, o trikampyje DEC — pusiaukampinė EF. Pasirodė, kad tiesės BD ir EF yra lygiagrečios. Įrodykite, kad kampas ABC dukart didesnis už kampą BAC.*



Sprendimas. Iš sąlygos seka, kad
$\angle ABD = \angle EBD = \angle CEF = \angle DEF = \angle BDE$. Tuo būdu, vidaus priešiniai kampai ABD ir BDE, gauti tiesei BD kertant tieses AB ir DE, yra lygūs. Todėl $AB \parallel DE$, o iš čia
$\angle BAC = \angle EDF = \angle EDB = \angle ABD = \angle ABC/2$, ką ir reikėjo įrodyti.

3. *Vytas 99 – niose kortelėse užrašė po vieną skaičių (tarp tų skaičių gali būti ir lygių) ir sudėliojo korteles ratu skaičiais žemyn. Apie kiekvieną kaimyninių kortelių porą jis savo draugui Petrui pasakė, kokie skaičiai yra užrašyti ant tų kortelių, bet nepasakė koks skaičius ant kurios kortelės. Ar galėjo Vytas parinkti skaičius taip, kad Petras negalėtų pagal šiuos duomenis vienareikšmiškai nustatyti ant kiekvienos kortelės užrašyto skaičiaus?*

Atsakymas. Negalėjo. Sprendimas. Pastebėkime, kad Petrui pakanka nustatyti skaičių kažkurioje vienoje kortelėje: nagrinėdami poras iš jos ir kaimyninių kortelių, mes sužinosime skaičius kaimyninėse kortelėse, ir, tokiu būdu eidami pirmyn, sužinosime skaičius visose kortelėse. Parodysime, kad Petras galės tą padaryti.

Nagrinėkime tris paeiliui einančias korteles. Tegul apie pirmąsias dvi yra žinoma, kad jose parašyti skaičiai yra a ir b, o apie dvi paskutiniąsias — kad jose parašyti skaičiai a ir c. Jeigu skaičiai b ir c skirtingi arba $a = b$, tai suprantama, kad viduriniojoje kortelėje parašytas skaičius a, ir uždavinys išspręstas. Gauname, kad Petras negalės nustatyti skaičių kortelėse tiktai tada, kuomet kiekvienoje kaimyninių kortelių poroje bus užrašyti tie patys skaičiai a ir b. Bet šis atvejis neįmanomas, todėl, kad skaičiai a ir b eina pakaitomis ratu, ir kortelių turėtų būti lyginis skaičius, o skaičius 99 nelyginis.

4. *Prieš pradėdamas spręsti uždavinius, Kęstas pažiūrėjo į laikrodį. Laikrodis rodė tarp pirmos ir antros valandos. Praėjus lygiai valandai po sprendimo pradžios, Kęstas vėl pažiūrėjo į laikrodį ir pastebėjo, kad kampas tarp valandinės ir minutinės rodyklių liko toks pats. Kada Kęstas pradėjo spręsti uždavinius?*

Atsakymas. 1 valandą $8^2/_{11}$ minutės arba 1 valandą $40^{10}/_{11}$ minutės. Sprendimas. Tegul tuo momentu, kai Kęstas pažiūrėjo į laikrodį, buvo x minučių po pirmos. Kadangi per minutę laikrodžio rodyklė nueina 6°, o valandinė — 0,5°, tai valandinė rodyklė tuo metu su 12 valandos kryptimi sudarė kampą, lygų $30°+0{,}5x°$, o minutinė — kampą, lygų $6x°$. Per valandą minutinė rodyklė padarė pilną ratą ir atsirado pradinėje vietoje, o valandinė pasisuko 30°. Akivaizdu, kad minutinė rodyklė bus nukreipta išilgai tiesės, dalijančios perpus kampą tarp dviejų valandinės rodyklės krypčių. Taigi, $6x° = ((30°+0,5x°)+(60°+0,5x°))/2$, jeigu minutinė rodyklė yra kampo, sudaromo dviejų valandinės rodyklės krypčių viduje, arba $6x°–180° = ((30°+0,5x°)+(60°+0,5x°))/2$, jeigu ne. Spręsdami šias dvi lygtis, gauname du aukščiau užrašytus atsakymus.

5. *Kiek mažiausiai skirtingų skaičių galima parinkti tokiu būdu, kad kiekvienas parinktasis skaičius būtų lygus kažkurių trijų kitų skirtingų parinktųjų skaičių sumai?*

Atsakymas. Septynis. Sprendimas. *Pavyzdys*. –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3. *Paaiškinimas*. Tegul n — didžiausias iš parinktų skaičių. Jeigu $n \le 0$, tai visi likę parinktieji skaičiai yra neigiami, ir bet kurių dviejų iš jų suma yra mažesnė už kiekvieną iš dėmenų, o, tuo pačiu, negali būti lygi n. Todėl $n > 0$. Tie du iš pasirinktų skaičių, kurių suma lygi n, taip pat turi būti teigiami, kitaip jų suma bus mažesnė už n. Taigi, tarp parinktų skaičių turi būti mažiausiai trys teigiami. Nagrinėdami mažiausią iš parinktų skaičių, analogiškai įsitikiname, kad tarp parinktų skaičių turi būti mažiausiai trys neigiami. Taigi, iš viso turi būti parinkta ne mažiau kaip šeši skaičiai.

Tarkime, kad parinkti lygiai šeši skaičiai: $a < b < c < d < e < f$. Iš įrodyto turime, kad $c < 0 < d$. Pakeitus, jeigu reikia, visų skaičių ženklus priešingais, galima laikyti, kad $d \le |c|$. Bet tada skaičiaus f neįmanoma išreikšti kaip kitų trijų parinktų skaičių sumos, kadangi netgi $c+d+e \le e < f$.