

## Леонард Эйлер атындағы VIII олимпиаданың дистанционды кезеңінің екінші тур шешімдері

1. Түзу жолдың бойында орналасқан, аралары 1 км болатын бағандардың бойымен бір бағытта тұрақты жылдамдықтармен Фома мен Ерёма жүріп өтті. Бір сағат ішінде Фома бес бағанның, ал Ерёма алты бағанның жанынан өтті. Фоманың жылдамдығы Ерёманың жылдамдығынан үлкен болуы мүмкін бе?

**Жауабы.** Мүмкін. **Шешуі.** Ерёма сағат басында, ол бірінші рет өткен бағанға 50 м жетпей, ал сағат соңында алтыншы бағаннан 50 м қашықтықта өтіп тұрсын. Сонда ол бір сағатта 6100 м жүрген. Ал Фома сағат басында, ол бірінші рет өткен бағанға 600 м жетпей, ал сағат соңында бесінші бағаннан 600 м қашықтықта өтіп тұрсын. Онда ол бір сағат ішінде  $600+4000+600 = 5200$  (м) жүрген болып тұр. Ал ол Ерёмның жүрген жолынан көп.

2. Бөлмеге үш адам жиналды. Олардың әрқайсысы әрқашан да шындықты айтатын сері; немесе әрқашан өтірік айтатын өтірікші; немесе кейде шындықты айтатын, ал кейде өтірік айтатын қу адам. Жиналғандардың біреуі: «Біздің арамызда өтірікші бар» деді; екіншісі: «Арамыздағы кез келген екі адамның ішінде өтірікші бар»; ал үшіншісі «Біз барлығымыз өтірікшіміз» деді. Жиналғандардың ішінде қу адам бар екенін дәлелденіздер.

**Шешуі.** Жиналғандардың ішінде қу адам жоқ болсын. Онда олардың әрқайсысы тек өтірікші немесе сері. Үшінші адам – өтірікші; кері жағдайда шыншықты өтірікші айтқан болушы еді. Демек, бірінші адам шындықты айтқан, және ол адам – сері. Екінші адамды қарастырайық. Ол өтірік айтты деп есептейік. Онда ол өтірікші және жиналғандардың арасында барлығы екі өтірікші: 2-ші мен 3-ші. Яғни кез келген екі адам ішінде шынымен екеуі де өтірікші болады. Демек, шындықты өтірікші айтқан болып тұр. Қарама-қайшылық. Енді, екіншісі шындықты айтсын деп есептейік. Осы жағдайда жиналғандар ішінде екі сері бар – олар 1-ші мен 2-ші адам. Ал осы екі адам ішінде өтірікші жоқ, яғни екінші адам өтірік айтқан болып тұр. Тағы да қарама-қайшылық.

3. Сүйірбұрышты  $ABC$  үшбұрышында  $A$  төбесінен жүргізілген медиана мен биссектриса осы үшбұрыштың  $BH$  биіктігін тең үш бөлікке бөле алады ма?

**Жауабы.** Бөле алмайды. **Шешуі.** Бөле алады деп есептейік.  $BH$  биіктігінде  $BF = FG = GH = BH/3$  болатындай  $F$  және  $G$  нүктелерін белгілейік.  $A$  бұрышының биссектрисасы  $BH$  кесіндісін  $K$  нүктесінде қисын.  $ABH$  үшбұрышынан биссектриса қасиеті бойынша  $BK/KH = AB/AH > 1$  екенін аламыз. Ол деген сөз,  $K$  мен  $G$  нүктелері беттеседі. Демек,  $ABC$  үшбұрышының  $AM$  медианасы  $F$  нүктесі арқылы өтеді. Сондықтан  $BC$ -ның ортасы  $M$  нүктесі  $BL$  кесіндісінде жатыр, ал  $FL \parallel AC$ . Бірақ ол мүмкін емес, өйткені Фалес теоремасы  $BL/BC = BF/BH = 1/3$ .

4. Вася алты  $a, b, c, d, e, f$  натурал сандарын жасырды. Бір рубль беріп олардың кез келген екеуін көрсетіп, сосын олардың көбейтіндісін білуге болады (мысалға екінші мен үшінші санның көбейтіндісін). Петя, жасырылған алты санның кез келген екеуі өзара жай екенін біледі (яғни 1-ден үлкен ортақ бөлгіші жоқ). Ең аз дегенде қанша ақша жұмсау арқылы Петя барлық алты санды таба алады?

**Жауабы.** 4 рубль жұмсау арқылы. **Шешуі.** Алдымен, 4 рубль беру арқылы барлық сандарды қалай табуға болатынын көрсетейік. Екі рубль беру арқылы  $ab$  мен  $bc$  көбейтіндісін біліп аламыз. Ал  $a$  мен  $c$  сандары өзара жай болғандықтан,  $ab$  мен  $bc$  сандарының ең үлкен ортақ бөлгіші  $b$ -ға тең болады. Одан кейін өзіміз  $a = ab/b$  және  $c = bc/b$  сандарын тауып аламыз. Дәл сол сияқты екі рубль беріп  $d, e$  және  $f$  сандарын табамыз.

Енді, барлық сандарды табу үшін үш рубльдің жетпейтінін көрсетейік. Біз тек үш көбейтіндіні білейік. Онда осы көбейтінділерге барлық алты сан кіру керек, кері жағдайда біз кірмеген сан туралы ештеңе білмейтін боламыз. Ал ол дегеніміз, әр сан тек бір көбейтіндіге кіреді деген сөз. Ондай жағдайда біз сол екі саннан құралған көбейтіндіден екі санның әрқайсысын нақты таба алмаймыз, мысалға егер шыққан көбейтінді 6-ға тең болса, онда ол 2-мен 3-тің көбейтіндісі ма, әлде 1-мен 6-ның көбейтіндісі ма екенін білмейміз.

5. Игорь өлшемі  $11 \times 11$  болатын тор квадраттан өлшемі  $1 \times 6$  болатын 17 тор тіктөртбұрыштарды қиып алғысы келеді. Сол 17 тіктөртбұрыштарды қалай қиып алмасан да, квадратта қиылмай қалатын бір шаршыны белгілесе болады ма?

**Жауабы.** Болады. **Шешуі.** Қиылмай қалатын шаршы – ортаңғы шаршы. Шынымен, сол шаршы қиып алынсын. Шешу ойы ыңғайлы болу үшін, сол шаршы кірегіні  $1 \times 6$  тіктөртбұрыш көлденеңнен болтындай квадратты бұрайық. Онда сол тіктөртбұрыш жауып тұрған алты шаршы алты тігінен орналасқан бағанда тұр, және де сол бағандарда  $1 \times 6$  тіктөртбұрыштары жоқ. Енді, бір бағанда тігінен орналасқан 1-ден көп тіктөртбұрыш сыймайды. Сондықтан тік орналасқан тіктөртбұрыштар саны 5-тен көп емес. Ал көлденеңнен орналасқан тіктөртбұрыштар саны 11-ден көп емес. Демек, барлық тіктөртбұрыштар саны 16-дан көп емес. Сондықтан, егер 16-дан көп тіктөртбұрыштар қиылып алынса, онда ортаңғы шаршы қиылмаған болу керек.