

Второй тур дистанционного этапа VIII олимпиады имени Леонарда Эйлера

Решения задач

1. Фома и Ерёма шли с постоянными скоростями в одном направлении по дороге, вдоль которой стоят километровые столбы. За час Фома прошёл мимо пяти столбов, а Ерёма — мимо шести. Могла ли скорость Фомы быть больше скорости Ерёмы?

Ответ. Могла. Решение. Пусть Ерёма в начале часа был в 50 м от первого из пройденных им столбов, а в конце часа — в 50 м за шестым столбом. Тогда он прошёл за час 5100 м. Пусть Фома в начале часа был в 600 м от первого из пройденных им столбов, а в конце часа — в 600 м за пятым из пройденных им столбов. Тогда он прошёл $600+4000+600 = 5200$ м — больше, чем Ерёма.

2. В комнате собрались три человека. Каждый из них либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжёт, либо хитрец, который может и говорить правду и лгать по своему желанию. Один из собравшихся сказал: «Среди нас есть лжец». Другой сказал: «Среди любых двух из нас есть лжец». Третий сказал: «Все мы — лжецы». Докажите, что среди собравшихся есть хитрец.

Решение. Допустим, среди собравшихся нет хитреца. Тогда каждый из них — рыцарь или лжец. Третий не мог сказать правду: иначе получилось бы, что правду сказал лжец. Значит, он лжец. Тогда первый сказал правду, и он — рыцарь. Остался второй. Допустим, он солгал. Тогда он лжец, и всего среди собравшихся два лжеца: второй и третий. Но тогда среди любых двух собравшихся в самом деле есть лжец, и получается, что лжец сказал правду — противоречие. Допустим, второй сказал правду. Тогда среди собравшихся два рыцаря: первый и второй. Но в таком случае среди двоих — первого и второго — нет лжеца, и получается, что второй солгал. Снова противоречие.

3. Могут ли медиана и биссектриса, проведенные из вершины A остроугольного треугольника ABC , делить высоту BH этого треугольника на три равные части?

Ответ. Не могут. Решение. Допустим, могут. Отметим на высоте BH такие точки F и G , что $BF = FG = GH = BH/3$. Пусть биссектриса угла A пересекает BH в точке K . Из треугольника ABH по свойству биссектрисы имеем $BK/KH = AB/AH > 1$, откуда $K = G$. Значит, медиана AM треугольника ABC проходит через точку F , и потому середина M стороны BC лежит на отрезке BL , где $FL \parallel AC$. Но это невозможно, так как по теореме Фалеса $BL/BC = BF/BH = 1/3$.

4. Вася задумал шесть натуральных чисел: a, b, c, d, e, f . За рубль можно указать любые два из них и узнать их произведение. Пете известно, что любые два из задуманных чисел взаимно просты (то есть не имеют общих делителей, больших 1). За какую наименьшую сумму он сможет узнать все задуманные числа?

Ответ. За 4 рубля. Решение. Покажем, как обойтись четырьмя рублями. Сначала узнаем произведения ab и bc . Так как у чисел a и c нет общих простых делителей, наибольший общий делитель этих произведений равен b . Таким образом мы узнаём число b , а с ним и числа $a = ab/b$ и $c = bc/b$. Аналогично за два вопроса узнаем числа d, e и f .

Покажем, что трёх рублей не хватит. Пусть мы знаем только три произведения. Тогда в них должны входить все шесть чисел, иначе про одно из них мы не будем знать вообще ничего. Но в таком случае каждое число входит ровно в одно произведение, и если, например, одно из произведений равно 6, мы не сможем отличить набор из двойки и тройки от набора из единицы и шестёрки.

5. Игорь хочет вырезать из клетчатого квадрата размером 11×11 17 клетчатых прямоугольников размером 1×6 . Можно ли отметить в квадрате одну клеточку так, чтобы она наверняка осталась не вырезанной, как бы Игорь ни старался?

Ответ. Можно. Решение. Не вырезанной останется центральная клеточка квадрата. В самом деле, пусть она вырезана. Для удобства рассуждений расположим квадрат так, чтобы содержащий эту клеточку прямоугольник 1×6 был горизонтален. Тогда в тех шести столбцах, где он расположен, вертикальный прямоугольник расположить нельзя. Два вертикальных прямоугольника в одном столбце тоже не помещаются. Поэтому вертикальных прямоугольников среди вырезанных не больше пяти. Горизонтально же вырезанных прямоугольников в каждой из 11 строк не больше одного. Поэтому всего получается не больше 16 вырезанных прямоугольников. Таким образом, если вырезано больше 16 прямоугольников, центральная клеточка не затронута.