

Второй тур дистанционного этапа IX олимпиады имени Леонарда Эйлера

Решения задач

1. Есть ли у числа $1\dots 1$ (1000 единиц) десятизначный делитель, все цифры которого различны?

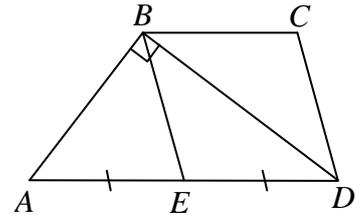
Ответ. Нет. Решение. Если все цифры десятизначного числа различны, то их сумма равна 45. Значит, такое число делится на 9. Число же $1\dots 1$ (1000 единиц) с суммой цифр 1000 не делится даже на 3.

2. Положительные числа a , b и c таковы, что $a^2 < b$ и $b^2 < c$ и $c^2 < a$. Докажите, что все три числа a , b и c меньше 1.

Решение. Пусть $a \geq 1$. Тогда $b > a^2 \geq 1$, $c > b^2 \geq 1$ и $a > c^2 > 1$. Но тогда $a^2 < b < b^2 < c < c^2 < a$, откуда $a < 1$. Противоречие.

3. В трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) $AD = 2$, $BC = 1$, $\angle ABD = 90^\circ$. Найдите сторону CD .

Ответ. $CD = 1$. Решение. Пусть E — середина основания AD . Так как треугольник ABD прямоугольный, $BE = AE = DE = 1$. С другой стороны, $BC = DE$ и $BC \parallel DE$, так что $BCDE$ — параллелограмм. Следовательно, $CD = BE = 1$.



4. Докажите, что число

$12345678987654321^2 - 987654321012345679^2 + (12345678987654321^2 + 987654321012345679^2)10^{36}$ является квадратом целого числа.

Решение. Пусть $x = 12345678987654321$, $y = 987654321012345679$. Тогда $x+y = 10^{18}$, и потому данное в условии выражение равно $x^2y^2 + (x^2+y^2)(x+y)^2 = (xy+x^2+y^2)^2$.

5. Известно, что среди 100 шаров ровно 51 радиоактивный. Имеется прибор, в который можно положить два шара, и если оба радиоактивны, то загорится лампочка (а если хотя бы один из двух шаров не радиоактивен, то не загорится). Можно ли найти все радиоактивные шары, используя прибор не более 145 раз?

Ответ. Можно. Решение. Разобьём шары на 50 пар и испытаем их. Рассмотрим два возможных случая.

1) Ровно одно из этих испытаний выявило два радиоактивных шара. Тогда в каждой из остальных 49 пар ровно по одному радиоактивному шару. Испытав с одним из найденных радиоактивных по одному шару из каждой оставшейся пары, мы распознаем все 98 оставшихся шаров. Всего мы провели $50+49 = 99$ испытаний.

2) По два радиоактивных шара выявилось хотя бы в двух испытаниях. Тогда 4 радиоактивных шара мы уже нашли. Испытаем с одним из найденных радиоактивных шаров 95 шаров из 48 оставшихся пар. После этого мы про 99 шаров будем знать, какие из них радиоактивны. Если таких шаров 50, оставшийся шар радиоактивен, а если 51, то нет. Мы нашли все радиоактивные шары за $50+95 = 145$ испытаний.

Замечание. Более тонкими рассуждениями оценку 145 можно улучшить.