Второй тур дистанционного этапа
XVIII олимпиады имени Леонарда Эйлера.
Решения задач

1. *Имеются четыре гири, весящие 1, 2, 3 и 4 кг, и ржавые чашечные весы, которые остаются в равновесии, если разность весов на чашах не превосходит 2 кг (а иначе перевешивает более тяжелая чаша). Как с их помощью определить, какая гиря сколько весит?* (И. Рубанов)

Решение. Взвесим каждую гирю с каждой из остальных. Одна из чаш перевесит только тогда, когда на ней находится гиря весом 4 кг, а на другой чаше — гиря весом 1 кг. Определив эти две гири, положим их на одну чашу и по очереди взвесим с каждой из двух оставшихся гирь. Гирю в 2 кг они перевесят, а гирю в 3 кг — нет.

2. *Найдутся ли такие два идущих подряд натуральных числа, что если их «рассыпать» на цифры, то всех цифр от 0 до 9 окажется поровну?* (И. Рубанов)

Ответ. Не найдутся. **Решение**. Допустим, нашлись такие два числа n и n+1. Если число n оканчивается на цифру k, не равную 9, то число n+1 оканчивается на цифру k+1, и у чисел n и n+1 совпадают цифры во всех разрядах, кроме разряда единиц. Поэтому общие количества всех цифр, кроме цифр k и k+1, в записях чисел n и n+1 четны, а цифры k, как и цифры k+1 — нечетное количество. Значит, поровну всех цифр в этом случае быть не может. Если же число n оканчивается каким-то количеством девяток, то рассмотрим цифру k, стоящую перед первой из этих девяток. Все цифры, идущие перед ней, в числе n+1 те же, что и в числе n, она сама в числе n+1 превращается в цифру k+1, а девятки после нее превращаются в нули. Поскольку хотя бы одна из цифр k и k+1 не равна ни 0, ни 9, общее количество равных ей цифр оказывается нечетным. С другой стороны, кроме цифр k, k+1, 0 и 9, есть еще по крайней мере шесть цифр, общее количество каждой из которых четно, так как она в числе n+1 стоит в тех же разрядах, что и в числе n. Значит, поровну всех цифр и в этом случае быть не может.

3. *Оля и Коля с постоянными скоростями ходят по треугольнику ABC: Оля — против часовой стрелки, Коля — по часовой стрелке. Они одновременно вышли из вершины B: Оля — по стороне BA, Коля — по стороне BC. Первый раз они встретились на середине стороны AC, а второй раз — на середине стороны BC. Могли ли они в третий раз встретиться на середине стороны AB?* (И. Рубанов)

Ответ. Не могли. **Решение**. Так как скорость сближения Оли и Коли, равная сумме их скоростей, постоянна, между каждыми двумя их соседними встречами (старт считаем нулевой встречей) проходит одно и то же время. Между стартом и первой встречей Оля прошла путь $AB+AC/2$, между первой и второй — путь $AC/2+BC/2$. Так как эти пути пройдены за одинаковое время, они равны. Приравнивая, получаем $AB = BC/2$. Допустим, третья встреча состоялась на середине стороны AB. Тогда между второй и третьей встречами Оля прошла путь $BC/2+AB/2$, откуда $BC/2+AB/2 = AC/2+BC/2$ и $AB = AC$. Итак, $AB = AC = BC/2$. Но тогда $AB+AC = BC$, что противоречит неравенству треугольника.

4. *Докажите, что внутри любого неравностороннего треугольника ABC можно отметить точку D так, что сумма углов ABD, BCD и CAD будет меньше 60 градусов.* (И. Рубанов)

Решение. У неравностороннего треугольника ABC найдется угол (пусть это угол A), меньший 60° — иначе сумма его углов была бы больше 180°. Проведем из точек B и C внутрь треугольника лучи l и m соответственно так, чтобы углы между лучами BA и l, а также лучами CB и m были меньше, чем $(60°-\angle A)/2$. Пусть D — точка пересечения этих лучей. Тогда $\angle ABD+\angle BCD+\angle CAD < 2\cdot(60°-\angle A)/2+\angle A = 60°$.

5. *Петя и Вася по очереди выставляют на клетчатую доску размером 2025×2025 клеток королей, начинает Петя. Вначале доска пуста. Петя каждым своим ходом ставит на любую свободную клетку доски синего короля. Вася каждым своим ходом ставит на любую свободную клетку доски красного короля. Петя хочет, чтобы наступил момент, когда какой-то синий король бьет не менее шести других синих королей. Может ли Вася ему помешать? Напомним, что король бьет все клетки, соседние со своей клеткой по вертикали, горизонтали или диагонали.* (С. Берлов)

Ответ. Может. **Первое решение**. Отделим от доски нижнюю горизонталь, а оставшийся прямоугольник 2025×2024 разобьем на *доминошки* — прямоугольники 1×2 с вертикальными сторонами длины 2. Если Петя ставит синего короля в нижнюю горизонталь, Вася ставит красного короля в любую свободную клетку этой горизонтали, а если все ее клетки уже заняты — в любую свободную клетку доски. Если Петя ставит синего короля в доминошку, Вася ставит красного короля на вторую клетку той же доминошки, а если она уже занята красным королем (синего короля там, очевидно, быть не может) — на любую свободную клетку доски. Тогда в конце игры в каждой доминошке будет красный король. Поэтому любой синий король, не стоящий на краю доски, будет бить по крайней мере трех красных королей: в своей доминошке и двух соседних по длинной стороне — и потому будет бить не более пяти синих королей. Король же, стоящий на краю доски, вообще бьет не более пяти клеток. **Второе решение**. Пусть после каждого хода Пети Вася ставит красного короля в соседнюю слева клетку от только что поставленного синего, если она занята — в соседнюю от него справа клетку, а если и она занята, то в любую свободную клетку. Пусть игра закончена. Возьмем любую *полоску* из трех идущих подряд клеток одной строки. Покажем, что в ней не могут стоять три синих короля. В самом деле, если первый синий король был поставлен на крайнюю правую или центральную клетку полоски, то рядом с ним в полоске тут же появился бы красный. Если же первый синий король был поставлен в крайнюю левую клетку полоски, то красный король появится рядом со вторым поставленным в полоску синим королем. Таким образом, если синий король стоит не на краю доски, то в окружающем его квадрате 3×3 будет хотя бы три красных короля и не более пяти синих, а на краю доски он бьёт не более пяти клеток.