Леонард Эйлер атындағы VII олимпиаданың дистанционды кезеңінің екінші туры

Есептер шешімі

1. Ұлу сағаттың циферблат бойымен сағат бағытына қарсы бірқалыпты жылдамдықпен қозғалады. Ол қозғалысын сағат дәл 12.00-де 12 сағаттық бағыттан бастады да, толық айналымды сағат дәл 14.00-де аяқтады. Ұлу қозғалыс барысында сағаттың минуттық тілімен кездескенде сағат қандай уақытты көрсеткен?

Жауабы. 12-40 және 13-20. Шешуі. Есеп шартынан ұлудын жылдамдығы минуттық тілден екі есе аз екені шығады. Сондықтан ұлу минуттық тілмен бірінші рет кездескенде, ол толық айналымның үштен бірін, ал минуттық тіл толық айналымның үштен екісін өтеді. Ол деген сөз, бірінші кездесу сағат 12-40-та болған. Дәл сол сияқты, олардың бірінші және екінші кездесу арасы 40 минутқа тең. Яғни екінші кездесу сағат 13-20-да болған.

2. 2×2 тақтаның әр шаршысына бір саннан жазылған. Сандардың барлығы әр түрлі. Бірінші қатардағы сандардың қосындысы, екінші қатардағы сандардың қосындысына тең, ал бірінші бағандағы сандардың көбейтіндісі, екінші бағандағы сандардың көбейтіндісіне тең. Барлық жазылған төрт санның қосындысын табыңдар.

a	b
c	d

Жауабы. 0. Шешуі. Жоғарыдағы қатарда солдан оңға санағанда a мен b сандары, ал төменгі қатарда солдан оңға қарай санағанда c мен d сандары жазылсын. Онда есеп шарты бойынша $a+b = c+d$ және $ac = bd$. Бірінші өрнектен c-ні өрнектеп, екіншіге қойсақ, $a(a+b-d) = bd \Leftrightarrow (a+b)(a-d) = 0$ өрнегін аламыз. Екі өрнектің көбейтіндісі нөлге тең болу үшін, оның қандай-да біреуі нөлге тең болу керек. Бірақ есеп шарты бойынша $a-d \neq 0$, демек $a = -b$. Дәл сол сияқты $c = -d$ екені шығады. Сонда барлық сандардың қосындысы 0-ге тең.

3. Теңбүйірлі емес ABC үшбұрышының A және C төбелерінен шығатын биссектрисалар үшбұрышты бір төртбұрышқа және үш үшбұрыштарға бөледі. Сол үш үшбұрыштарың ішінде екі теңбүйірлі үшбұрыш бар. ABC үшбұрышының бұрыштарын табыңдар.

Жауабы. 180°/7, 2·180°/7, 4·180°/7. Шешуі. AK және CM — биссектрисалар, I — олардың қиылысу нүктесі болсын. Қай үшбұрышта қандай бұрыштар тең болатынын қарайық. AIC үшбұрышы теңбүйірлі бола алмайды. Ол үшбұрышта $\angle AIC = 90°+\angle ABC/2$ — доғал, ал $\angle IAC = \angle BAC/2 \neq \angle BCA/2 = \angle ICA$. $\angle MIA = \angle MAI$ и $\angle KCI = \angle KIC$ теңдіктері де мүмкін емес, өйткені AIC бұрышының сыртқы бұрышы оған сыбайлас емес болатын ішкі бұрышқа тең бола алмайды. Соңғы жағдайда, бір уақытта $\angle MIA = \angle IMA$ және $\angle KIC = \angle IKC$ немесе $\angle IAM = \angle IMA$ және $\angle ICK = \angle IKC$ теңдіктері орындала алмайды. Өйткені кері жағдайда $\angle BAC = \angle ACB$ болушы еді. Сонда, тек жалғыз жағдай қалды, ол

$$\angle AIM = \angle AMI = 90°-\angle ABC/2 = 90°-\angle BAC/4,\ \angle ICK = \angle IKC = \angle ACB/2 = 90°+\angle ABC/2-\angle ACB/2.$$

Ол деген сөз $2\angle ABC = \angle BAC$ и $\angle ACB = 90°+\angle ABC/2$ теңдігі орындалады. Яғни $7\angle ABC/2 = 90°$, осыдан есептің жауабы шығады.

4. N санының 1 және N-нен басқа барлық бөлгіштерін кему ретімен бір қатарға жазып шыққан: $d_1 > d_2 > \ldots > d_k$. Осы қатардың екі ұштарынан бірдей қашықтықта орналасқан екі кез келген бөлгіш жұптарының үлкені кішісіне бөлінетін болып шыққан (яғни d_1 саны d_k-ға бөлінеді, d_2 саны d_{k-1} санына бөлінеді, тағы сол сияқты). Олай болса, N санының кез келген екі бөлгіш жұбында үлкен бөлгіш кіші бөлгішке бөлінетінін дәлелде.

Шешуі. $N = d_1d_k = d_2d_{k-1} = \ldots$ теңдік тізбегі орындалатынын байқау қиын емес. Яғни есеп шартын басқалай жазып шықса болады: егер N санының екі бөлгіштерінің көбейтіндісі сол N санының өзіне тең болса, онда үлкен бөлгіш кіші бөлгішке бөлінеді. N санының өзінің p-ға тең болатын жай бөлгішінен басқа жай бөлгіші болсын. Онда N санын әрқайсысы 1-ден үлкен болатын өзара жай екі санның көбейтіндісі ретінде жазса болады. Ал ол есеп шартына (үлкені кішісіне бөлінеді деген) қарама-қайшылық. Яғни N саны жай санның дәрежесіне тең, ал осыдан есеп шарты шығады.

5. Екі ойыншы келесі ойын ойнайды. Бір жүрісте 1001×1001 тақтаның қандай-да бір шаршысына бір тас қоюға болады (басында тақта бос болған; бір шаршыда кез келген мөлшерде тас жата алады). Ойыншылар кезектесіп жүреді. Егер қандай-да бір ойыншының жүрісінен кейін қандай-да бір бағанда немесе қандай-да бір қатарда тас саны 5-тен асып кетсе, онда сол ойыншы ұтылған болып саналады. Дұрыс ойында қарсыласының ойнағанына қарамастан, қай ойыншы ұтады: бірінші жүрісті жүрген ойыншы ма, әлде екінші ма?

Жауабы. Бірінші. Бірінші шешім. Тақтаға 5005-ші тас қойылғанға дейін бірінші ойыншы жалпы саны 5 тастан аз болатын бір жол мен бір баған таңдап алып (ондай жол мен баған табылады), олардың қиылысуында тұрған шаршыға тас қояды. Егер 5005-ші тас қойылғанға дейін екінші ойыншы қателеспесе, онда тақтаға 5005-ші тас қойылған кезде (оны бірінші ойыншы қояды), әр қатарда және әр бағанда 5 тастан болады. Яғни осындай стратегияда бірінші ойыншы ұтады. Екінші шешім. Бірінші жүрісте бірінші ойыншы тасты тақтаның дәл ортасына қойып, өзінің әр келесі жүрісінде, екінші ойыншының жүрісіне тақтаның ортасына қарағанда симметриялы жүріп отырсын. Сонда, егер бірінші ойыншы ортаңғы шаршысы бар бағанға немесе қатарға жүрсе, онда оның жүрісінен кейін сол бағанда немесе қатарда тас саны тақ болады.

Пусть первым ходом первый положит камешек в центральную клетку доски, а затем кладет каждый свой камешек симметрично относительно центра доски последнему камешку соперника. Тогда если первый делает ход в строку или столбец, содержащий центральную клетку, там после этого хода будет нечетное числу камешков, а если камешек первого оказался в строке или столбце, не содержащем центральную клетку, там после его хода станет столько же камешков, сколько в симметричной относительно центра доски строке (столбце). Таким образом, если после хода первого в какой-то строке или каком-то столбце оказалось больше 5 камешков, то и до его хода были строка или столбец, где находилось больше 5 камешков. Значит, первый при такой игре не может проиграть, а так как игра конечна, то второй рано или поздно проиграет.