Третий тур дистанционного этапа IX олимпиады имени Леонарда Эйлера

Решения задач

1. *Учительница нарисовала на доске прямоугольник ABCD. Ученик Петя разделил этот прямоугольник на две прямоугольника прямой, параллельной стороне AB. Оказалось, что площади этих частей относятся как 1:2, а периметры как 3:5 (в том же порядке). Ученик Вася разделил этот прямоугольник на две части прямой, параллельной стороне BC. Площади новых частей тоже относятся как 1:2. Как относятся их периметры?*

Ответ. 20:19. Решение. Пусть $AB = a$, $BC = b$, и первая прямая делит сторону BC на отрезки x, $b–x$. Тогда по условию $b–x = 2x$ и $5(x+a) = 3(b–x+a)$, откуда $b = 6a$. Пусть теперь вторая прямая делит сторону AB на отрезки y, $a–y$. По условию $y = 2(a–y)$, то есть $y = 2a/3$. Тогда отношение периметров равно $(y+b)/(a–y+b) = 20:19$.

2. *В треугольнике ABC на стороне BC взята точка K. KM и KP — биссектрисы треугольников AKB и AKC соответственно. Оказалось, что диагональ MK делит четырёхугольник BMPK на два равных треугольника. Докажите, что M — середина AB.*

Решение. Прямые KM и MP перпендикулярны, как биссектрисы смежных углов. Поэтому треугольник BMK тоже прямоугольный. В треугольнике MBK угол BKM — острый. Так как сторона MK у двух наших треугольников — общая, угол MBK равен углу MPK, который также является острым. Значит, в треугольнике MBK прямым является угол BMK. Но тогда в треугольнике ABK высота является высотой и биссектрисой, а, значит, и медианой.

3. *Решите ребус УХА = НОК(УХ, УА, ХА). Здесь У, Х, А — три различные цифры. Двузначные и трёхзначные числа не могут начинаться с нуля. Напомним, что НОК нескольких натуральных чисел — наименьшее натуральное число, делящееся на каждое из них.*

Ответ. 150 = НОК(15, 10, 50). Решение. Так как УХА делится на УХ, А = 0, то есть число имеет вид УХ0. Так как УХ0 делится на У0 и Х0, УХ делится на У и Х, откуда следует, что Х делится на У, а 10У делится на Х. Пусть Х = М·У. Тогда 10У делится на М·У, откуда 10 делится на М, то есть М = 2 или М = 5. Условию Х = 2У удовлетворяют только числа 120, 240, 360, 480, а условию Х = 5У — только число 150. Проверка показывает, что подходит только число 150.

4. *Двадцать восемь лямзиков весами 2, 3, 4 и 5 кг (по 7 лямзиков каждого веса) переправились через реку на вёсельной лодке, выдерживающей вес 10 кг. Известно, что каждый лямзик грёб не более двух раз. Докажите, что грести пришлось не менее чем 12 лямзикам. У лодки один гребец, без гребца лодка плыть не может.*

Решение. Пусть гребли не более 11 лямзиков. То было не более 22 перевозок. Значит, рейсов «туда» было бы не более одиннадцати. На другой берег нужно перевезти (2+3+4+5)·7 = 98 кг, поэтому рейсов «туда» не может быть меньше 10. Значит возможны два варианта: «туда 10, обратно 9» или «туда 11, обратно 10». Так как тех, кто вёз лодку обратно, нужно вернуть, в любом случае «туда» нужно перевезти не менее 98+18 = 116 кг, но даже за 11 рейсов столько не перевезёшь. Противоречие.

5. *Петя отмечает на плоскости четыре точки так, чтобы их все нельзя было зачеркнуть двумя параллельными прямыми. Из прямых, проходящих через пары точек, Вася выбирает две, измеряет угол между ними и платит Пете сумму, равную градусной мере угла. Какую наибольшую сумму может гарантировать себе Петя?*

Ответ. 30. Решение. *Оценка*. Есть 6 пар точек, то есть 6 возможных прямых. По условию, среди них нет параллельных. Проведём через одну точку шесть параллельных им прямых. Они разобьют плоскость на 12 углов, поэтому есть угол не более 30 градусов. *Пример.* Возьмём произвольный отрезок AC и по разные стороны от него построим равносторонний треугольник ABC и равнобедренный треугольник ADB с углом 120° при вершине D. Легко убедиться, что угол между любыми двумя из шести прямых, заданных точками A, B, C, D, не меньше 30 градусов.