**Третий тур дистанционного этапа X олимпиады имени Леонарда Эйлера**

**Решения задач**

**1.** *Винтик и Шпунтик смастерили машину «Тяни-толкай», которая едет вперед на сиропчике с расходом топлива 3л/км, а назад – на апельсиновом соке с расходом топлива 5л/км. Выехав из дома, они вели машину по очереди. Винтик проехал за рулём в обе стороны 12 км. Шпунтик ехал вперед вдвое меньше, чем Винтик, а назад проехал вдвое больше, после чего имевшиеся 75 литров топлива закончились. Сколько километров Винтику и Шпунтику придется возвращаться домой пешком?*

Ответ. 9 км. Решение. Пусть Винтик проехал 2*x* км вперед и *y* км назад, тогда 2*x*+*y* = 12 и 9*x*+15*y* = 75 (так как вместе они проехали 3*x* км вперед и 3*y* км назад). Решая систему, получаем *x* = 5, *y* = 2. Осталось посчитать 3*x*–3*y* = 9.

**2.** *Натуральное число заканчивается на ноль, а наибольший из его делителей, не равных ему самому, является степенью простого числа. Найдите предпоследнюю цифру этого числа.*

Ответ. 1 или 5. Решение. Натуральное число делится на 2 и 5. Тогда его наибольший собственный делитель — половина числа, а само число имеет вид 2⋅5*k*. При *k*= 1 предпоследняя цифра будет 1, а при *k* > 1будет 5, так как 5*k* в этом случае оканчивается на 25.

**3.** *В выпуклом пятиугольнике ABCDE AB параллельно DE, CD = DE, CE перпендикулярно BC и AD. Докажите, что прямая, проходящая через A параллельно CD, прямая, проходящая через B параллельно СЕ, и прямая, проходящая через E параллельно BC, пересекаются в одной точке.*

Решение. Треугольник *CDE* равнобедренный, а *AD —* высота к его основанию. Значит, *AD —* биссектриса треугольника *CDE*, углы *ADE* и *ADC* равны. Углы *ADE* и *BAD* равны как накрест лежащие при пересечении параллельных прямых *AB* и *DE* секущей *AD.* Тогдауглы *ADC* и *BAD* равны. Так как прямые *BC* и *AD* перпендикулярны одной прямой, то они параллельны, и *ABCD —* равнобокая трапеция, откуда *AB = CD = DE*. Значит, *ABDE —* параллелограмм. Пусть *О* — точка пересечения его диагоналей *AD* и *BE,* тогда *АО = ОD, BO = OE*.

Пусть *X —* точка пересечения прямой, проходящей через *B* параллельно *СЕ*, и прямой, проходящей через *Е* параллельно *BС*. Тогда *ВCЕX —* параллелограмм. Точка *О* — середина его диагонали *BE*, значит она же является серединой диагонали *CX*. Тогда диагонали *AD* и *CX* четырехугольника *АСDХ* точкой пересечения делятся пополам. Значит, *АСDХ —* параллелограмм, то есть *АX* параллельно *CD*, и все три указанные в условии задачи прямые пересекаются в одной точке.

**4.***В городе лжецов и рыцарей 366 жителей, все родились в разные дни високосного года. Все жители города ответили на два вопроса. На вопрос «Вы родились в феврале?» утвердительно ответили 100 человек, а на вопрос «Вы родились 30-го числа?» утвердительно ответили 60 человек. Сколько рыцарей родилось в феврале?*

Ответ. 29. Решение. На первый вопрос утвердительно ответили рыцари, родившиеся в феврале, и лжецы, родившиеся в другие месяцы. Пусть в феврале родились *x* рыцарей, *x* не превосходит 29. Тогда в феврале родились 29 – *x* лжецов, а в другие месяцы родились 100 – *x* лжецов. Всего лжецов получается 129 – 2*x*, то есть от 71 до 129 человек.

На второй вопрос утвердительно ответили рыцари, родившиеся 30-го числа, и лжецы, родившиеся в другие числа. Пусть 30-го числа родились *c* рыцарей, *c* не превосходит 11. Тогда 30-го числа родились 11 – *c* лжецов, а в другие числа родились 60 – *c* лжецов. Всего лжецов получается 71 – 2*c*, то есть от 49 до 71 человека.

Значит, число лжецов равно 71, откуда *x*= 29.

**5.** *В некоторые клетки доски 8×8 вписаны треугольники, у которых одна сторона совпадает со стороной клетки, а третья вершина лежит на противоположной стороне клетки. У треугольников нет общих точек. Каково наименьшее возможное число пустых клеток?*

Ответ. 24. Решение. *Оценка.* На стороне каждого треугольника лежит не менее двух вершин клеток, всего вершин 9\*9=81. Тогда всего треугольников не более 40, а свободных клеток не менее 24. *Пример*. Чередуются заполненные и незаполненные концентрические кольца (см. рисунок).