Третий тур дистанционного этапа X олимпиады имени Леонарда Эйлера

Решения задач

1. *Винтик и Шпунтик смастерили машину «Тяни-толкай», которая едет вперед на сиропчике с расходом топлива 3л/км, а назад – на апельсиновом соке с расходом топлива 5л/км. Выехав из дома, они вели машину по очереди. Винтик проехал за рулём в обе стороны 12 км. Шпунтик ехал вперед вдвое меньше, чем Винтик, а назад проехал вдвое больше, после чего имевшиеся 75 литров топлива закончились. Сколько километров Винтику и Шпунтику придется возвращаться домой пешком?*

Ответ. 9 км. Решение. Пусть Винтик проехал $2x$ км вперед и y км назад, тогда $2x+y = 12$ и $9x+15y = 75$ (так как вместе они проехали $3x$ км вперед и $3y$ км назад). Решая систему, получаем $x = 5$, $y = 2$. Осталось посчитать $3x–3y = 9$.

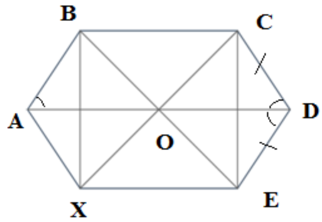
2. *Натуральное число заканчивается на ноль, а наибольший из его делителей, не равных ему самому, является степенью простого числа. Найдите предпоследнюю цифру этого числа.*

Ответ. 1 или 5. Решение. Натуральное число делится на 2 и 5. Тогда его наибольший собственный делитель — половина числа, а само число имеет вид $2{\cdot}5^k$. При $k = 1$ предпоследняя цифра будет 1, а при $k > 1$ будет 5, так как 5^k в этом случае оканчивается на 25.

3. *В выпуклом пятиугольнике ABCDE AB параллельно DE, CD = DE, CE перпендикулярно BC и AD. Докажите, что прямая, проходящая через A параллельно CD, прямая, проходящая через B параллельно CE, и прямая, проходящая через E параллельно BC, пересекаются в одной точке.*

Решение. Треугольник CDE равнобедренный, а AD — высота к его основанию. Значит, AD — биссектриса треугольника CDE, углы ADE и ADC равны. Углы ADE и BAD равны как накрест лежащие при пересечении параллельных прямых AB и DE секущей AD. Тогда углы ADC и BAD равны. Так как прямые BC и AD перпендикулярны одной прямой, то они параллельны, и $ABCD$ — равнобокая трапеция, откуда $AB = CD = DE$. Значит, $ABDE$ — параллелограмм. Пусть O — точка пересечения его диагоналей AD и BE, тогда $AO = OD$, $BO = OE$.

Пусть X — точка пересечения прямой, проходящей через B параллельно CE, и прямой, проходящей через E параллельно BC. Тогда $BCEX$ — параллелограмм. Точка O — середина его диагонали BE, значит она же является серединой диагонали CX. Тогда диагонали AD и CX четырехугольника $ACDX$ точкой пересечения делятся пополам. Значит, $ACDX$ — параллелограмм, то есть AX параллельно CD, и все три указанные в условии задачи прямые пересекаются в одной точке.



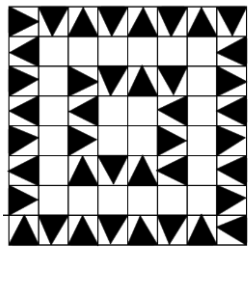
4. *В городе лжецов и рыцарей 366 жителей, все родились в разные дни високосного года. Все жители города ответили на два вопроса. На вопрос «Вы родились в феврале?» утвердительно ответили 100 человек, а на вопрос «Вы родились 30-го числа?» утвердительно ответили 60 человек. Сколько рыцарей родилось в феврале?*

Ответ. 29. Решение. На первый вопрос утвердительно ответили рыцари, родившиеся в феврале, и лжецы, родившиеся в другие месяцы. Пусть в феврале родились x рыцарей, x не превосходит 29. Тогда в феврале родились $29 – x$ лжецов, а в другие месяцы родились $100 – x$ лжецов. Всего лжецов получается $129 – 2x$, то есть от 71 до 129 человек.

На второй вопрос утвердительно ответили рыцари, родившиеся 30-го числа, и лжецы, родившиеся в другие числа. Пусть 30-го числа родились c рыцарей, c не превосходит 11. Тогда 30-го числа родились $11 – c$ лжецов, а в другие числа родились $60 – c$ лжецов. Всего лжецов получается $71 – 2c$, то есть от 49 до 71 человека.

Значит, число лжецов равно 71, откуда $x = 29$.

5. *В некоторые клетки доски 8×8 вписаны треугольники, у которых одна сторона совпадает со стороной клетки, а третья вершина лежит на противоположной стороне клетки. У треугольников нет общих точек. Каково наименьшее возможное число пустых клеток?*



Ответ. 24. Решение. *Оценка.* На стороне каждого треугольника лежит не менее двух вершин клеток, всего вершин 9*9=81. Тогда всего треугольников не более 40, а свободных клеток не менее 24. *Пример.* Чередуются заполненные и незаполненные концентрические кольца (см. рисунок).