Третий тур дистанционного этапа XI олимпиады имени Леонарда Эйлера

Решения задач

1. *Вася, Петя и Коля учатся в одном классе. Вася в ответ на любой вопрос врёт, Петя попеременно врёт и говорит правду, а Коля врёт в ответ на каждый третий вопрос, а в остальных случаях говорит правду. Однажды каждого из них шесть раз подряд спросили, сколько человек учится в их классе. В ответ пять раз прозвучало: «Двадцать пять», шесть раз: «Двадцать шесть» и семь раз: «Двадцать семь». Можно ли по их ответам узнать, сколько человек в их классе на самом деле?* (Автор задачи — И. Рубанов)

<u>Ответ</u>. 27. <u>Решение</u>. Вася ни разу не сказал правды, Петя сказал правду трижды, а Коля — четырежды. Таким образом, правда была сказана ровно семь раз, откуда и получаем ответ.

2. *В трапеции $ABCD$ основание AD больше боковой стороны CD. Биссектриса угла D пересекает сторону AB в точке K. Докажите, что $AK > KB$.* (С. Берлов, И. Рубанов)

<u>Решение</u>. Пусть M и N — середины сторон AB и CD соответственно. Отметим на основании AD такую точку E, что $DE = CD$. В равнобедренном треугольнике CDE биссектриса угла D является медианой. Следовательно, точка F ее пересечения с отрезком CE лежит на средней линии MN трапеции $ABCD$. Поэтому точка K лежит на стороне BM трапеции $MBCN$, откуда $AK > AM = BM > BK$.

3. *Петя задумал 8 различных чисел, а потом стал выбирать из них по два и делить большее на меньшее. Он нашел 22 из 28 возможных частных, и они оказались натуральными степенями двойки. Докажите, что 6 оставшихся частных — тоже натуральные степени двойки. (Натуральная степень двойки — это 2 в степени, показатель которой равен натуральному числу.)* (И. Рубанов)

<u>Решение</u>. Напишем задуманные Петей числа $a_1, \ldots, a_8$ на плоскости и соединим каждые два числа линией: красной, если Петя нашел частное от деления чисел, которые она соединяет, и синей, если не нашел. Всего получится 22 красных и 6 синих линий.

Пусть два числа, скажем, a_1 и a_2 ($a_1 > a_2$), соединены синей линией. Тогда в шести не имеющих общих линий путях $a_1 - a_3 - a_2$, $a_1 - a_4 - a_2$, …, $a_1 - a_8 - a_2$ не больше пяти синих линий. Значит, хотя бы один из них — пусть $a_1 - a_3 - a_2$ — состоит целиком из красных линий, то есть $a_1/a_3 = 2^n$ и $a_3/a_2 = 2^m$, где n и m — целые числа. Но тогда $a_1/a_2 = (a_1/a_3)(a_3/a_2) = 2^n\cdot 2^m = 2^{m+n}$. Это целая степень двойки, а так как $a_1 > a_2$, то натуральная степень двойки.

4. *На окружности отмечены 48 точек, делящих ее на равные дуги. Играют двое, ходят по очереди. За один ход разрешается стереть либо три отмеченные точки, лежащие в вершинах равностороннего треугольника, либо четыре отмеченные точки, лежащие в вершинах квадрата. Дважды стирать одну точку нельзя. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто при правильной игре выиграет независимо от действий соперника: тот, кто делает первый ход, или тот, кто ходит вторым?* (И. Рубанов, Д. Ширяев, по фольклорным мотивам)

<u>Ответ</u>. Тот, кто ходит вторым. <u>Решение</u>. Покрасим точки в четыре цвета, двигаясь по часовой стрелке: ксзжкс…зж. Первым четырем покрашенным точкам присвоим номер 1, вторым четырем — номер 2 и т.д., до номера 12 включительно. Заметим, что каждым ходом стираются три одноцветные точки. Разобьем цвета на пары: к–с, з–ж. Чтобы победить, второму достаточно каждым ходом стирать точки цвета, парного тому, который накануне стирал соперник, с теми же номерами, что на предыдущем ходе соперника. Эти точки не могли быть стерты раньше, потому что тогда были бы стерты раньше и точки, которые накануне стер соперник. Значит, у второго всегда будет ход, а поскольку в игре может быть сделано не более 16 ходов, хода в конце концов нет окажется у первого.

5. *Есть 40 гирь. Веса любых двух отличаются не более чем на 45 кг. Любые десять из этих гирь можно разбить на две группы по пять гирь, суммы весов которых отличаются не более чем на 11 кг. Докажите, что найдутся две гири, веса которых отличаются не более чем на 1 кг.* (С. Берлов, Д. Ширяев)

<u>Решение</u>. Допустим, существуют гири весов $a_1 < a_2 < \ldots < a_{40}$, опровергающие утверждение задачи. Тогда при всех i от 1 до 39 $a_{i+1} = a_i+1+b_i$, где $b_i > 0$. Кроме того, по условию $a_{40}-a_1 = 39+b_1+\ldots+b_{39} \le 45$, откуда $B = b_1+\ldots+b_{39} \le 6$.

Возьмем гири $a_1 - a_5$ (назовем их *легкими*) и гири $a_{36} - a_{40}$ (назовем их *тяжелыми*). По условию их можно разделить на две группы по 5 гирь, суммы весов которых отличаются не более чем на 11 кг. В одной из этих групп будет хотя бы три тяжелых гири. Значит, ее вес будет не меньше, чем $a_{36}+a_{37}+a_{38}+a_1+a_2$, а вес другой группы — не больше, чем $a_{40}+a_{39}+a_3+a_4+a_5$. Оценим разность весов этих групп:

$$((a_{38}-a_{40})+(a_1-a_5))+((a_{37}-a_{39})+(a_2-a_4))+(a_{36}-a_3) > (-2-4-B)+(-2-2-B)+33 = 23-2B = 11.$$

Противоречие.