

Третий тур дистанционного этапа XII олимпиады имени Леонарда Эйлера

Решения задач

1. У Васи Пупкина кончились деньги, и он нанялся на работу. По договору он работал без выходных и за каждый день работы он получал по 100 грошей. Получаемые деньги Вася начал тратить. В первый день работы он потратил 1 грош, а в каждый следующий день тратил на 1 грош больше, чем в предыдущий. К концу какого дня работы Вася снова оказался без денег? (Вася ежедневно получал 100 грошей в конце работы, а тратил деньги после работы.) (И. Рубанов)

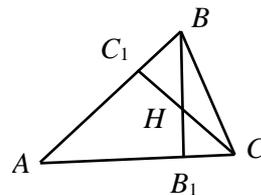
Ответ. К концу 199-го дня. **Решение.** Пусть Вася в конце каждого дня кладет заработанные в этот день, но не потраченные деньги в тумбочку. В первый день он положит туда 99 грошей, на второй — 98, ..., на 99-ый — 1 грош, на сотый день не положит ничего. На 101-ый день Васе придется взять из тумбочки 1 грош: столько же, сколько он положил туда на 99-ый день, на 102-ой день — 2 гроша: столько же, сколько он положил туда на 98-ой день, ..., на 199-ый день — 99 грошей: столько же, сколько он положил туда в первый день. Тут-то деньги и кончились.

2. На презентации фирмы «Рога и Копыта» было 30 депутатов и бизнесменов. Известно, что депутаты всегда говорят правду, а бизнесмены могут говорить все, что угодно. Их всех усадили за один круглый стол. Во время неофициальной части каждый из них сделал заявление: «Среди двух моих соседей есть хотя бы один бизнесмен». Какое наибольшее число депутатов могло быть на презентации? 5 Уральский турнир юных математиков)

Ответ. 20. **Решение.** Из условия следует, что три депутата не могут сидеть подряд. Поэтому если разбить всех сидящих за столом на 10 троек, в каждой из которых люди идут подряд, то в каждой тройке будет хотя бы один бизнесмен. Значит, всего бизнесменов не меньше 10, то есть депутатов не больше 20. Пример, когда депутатов ровно 20, дает тройка ДДБ, повторенная 10 раз.

3. В остроугольном треугольнике ABC угол при вершине A равен 45 градусам. Докажите, что периметр этого треугольника меньше удвоенной суммы его высот, опущенных из вершин B и C . (И. Рубанов)

Решение. Пусть высоты BB_1 и CC_1 пересекаются в точке H . Заметим, что треугольники AB_1B , AC_1C , HB_1C и HC_1B — прямоугольные равнобедренные с прямыми углами в вершинах B_1 и C_1 соответственно. Поэтому $AB_1 = BB_1$, $AC_1 = CC_1$, $B_1C = HB_1$, $C_1B = HC_1$. Кроме того, по неравенству треугольника $BH + CH > BC$. Значит, $AB + AC + BC = AC_1 + C_1B + AB_1 + B_1C + BC < CC_1 + HC_1 + BB_1 + HB_1 + BH + CH = 2(CC_1 + BB_1)$, что и требовалось доказать.



4. На столе лежит 101 кучка по 101 спичке. За один ход берется одна спичка из любой кучки. Двое игроков ходят по очереди. Если не позднее 10000-го хода будет взята последняя спичка из какой-то кучки, взявший её выигрывает, иначе — ничья. Может ли кто-то из игроков выиграть независимо от игры соперника, и если да, то кто? (И. Рубанов, А. Шаповалов)

Ответ. Не может. **Решение.** Заметим, что если не позднее 9999-го хода взять спичку из кучки, где осталось ровно две спички, то соперник выигрывает, забрав оттуда последнюю спичку. Поэтому при наилучшей игре обоих игроков каждый будет, пока это возможно, брать спичку из кучки, где больше двух спичек, а проигрышная позиция для того, чья очередь ходить, может возникнуть только тогда, когда во всех кучках останется по две спички. Однако, это может случиться только после того, как из каждой кучки будет взято по 99 спичек, то есть после $99 \cdot 101 = 9999$ ходов. Но следующим ходом будет 10000-ый, и после него в каждой кучке будет еще хотя бы одна спичка. Значит, игра закончится вничью.

5. Учитель написал на доске 10 отрицательных целых чисел. Вася переписал в тетрадь эти числа, затем записал туда же всевозможные их попарные произведения, всевозможные произведения трёх, четырёх, ..., девяти из этих чисел и, наконец, произведение всех десяти чисел. Оказалось, что сумма всех записанных Васей чисел отрицательна. Чему она могла быть равна? (И. Рубанов)

Ответ. -1 . **Решение.** Пусть на доске написаны числа a_1, a_2, \dots, a_{10} . Положим $A = (1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_{10})$. По условию все 10 сомножителей в правой части неположительны. Поэтому $A \geq 0$. Заметим теперь, что, раскрыв все скобки в правой части, мы получим как раз сумму всех записанных Васей чисел, увеличенную на 1. Значит, сумма всех записанных Васей чисел не меньше, чем -1 , а так как она по условию отрицательна, то она равна -1 .