Второй тур дистанционного этапа V олимпиады имени Леонарда Эйлера

Решения задач

1. *На доске выписаны числа от 1 до 2150. Каждую минуту каждое число подвергается следующей операции: если число делится на 100, то его делят на 100, если же не делится, то из него вычитают 1. Найдите наибольшее среди чисел на доске через 87 минут.*

Ответ: 2012. Решение. Все числа, две последние цифры которых — 86 или меньше, за 87 минут успеют превратиться в числа, оканчивающиеся на 00, и следующим шагом уменьшится в 100 раз. В итоге все такие числа через 87 минут окажутся не больше, чем 2100/100 = 21. Те же числа, которые оканчиваются на 87 и более, за 87 минут уменьшатся на 87. Наибольшее из таких чисел — 2099, и оно через 87 минут превратится в 2012.

2. *Навигатор на «Лексусе» бизнесмена Бориса Михайловича сообщает, сколько осталось ехать до пункта назначения, если двигаться со скоростью, равной средней скорости на промежутке от начала пути до настоящего момента. Борис Михайлович выехал из дома на дачу. В середине пути навигатор сообщил, что осталось ехать 1 час. В этот момент прямо перед «Лексусом» на дорогу выехал тракторист Вася, обогнать которого не было никакой возможности. После того, как Борис Михайлович проехал половину оставшегося пути, навигатор сообщил, что осталось ехать 2 часа. Через сколько часов после этого приедет на дачу бизнесмен, если так и не обгонит тракториста? (Скорость трактора постоянна.)*

Ответ: Через 5 часов. Первое решение. Примем расстояние от дома БМ до дачи за 4 единицы длины. Тогда средняя скорость «Лексуса» на первой половине пути по условию равнялась 2 ед./час. Пусть v ед./час — скорость трактора. Тогда на третью четверть пути «Лексус» потратил $1/v$ часов, и его средняя скорость на первых трёх четвертях пути составила $3/(1+1/v)$ ед./час. С другой стороны, по условию с такой скоростью «Лексус» проедет оставшуюся четверть пути за 2 часа, откуда $2(3/(1+1/v)) = 1$. Решая это уравнение, находим $v = 1/5$, откуда и получаем ответ. Второе решение. Когда навигатор сообщил Борису Михайловичу, что ему осталось ехать 2 часа, ехать ему оставалось четверть пути. Значит, уже пройденные ¾ пути он проехал за 6 часов. Но первую половину пути БМ проехал за час, значит, 5 часов он ехал за Васей третью четверть пути. Столько же времени уйдет у него и на оставшуюся четверть.

3. *Точка E — середина основания AD трапеции $ABCD$. Отрезки BD и CE пересекаются в точке F. Известно, что $AF \perp BD$. Докажите, что $BC = FC$.*

Решение. FE — медиана, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника AFD. Поэтому $FE = AD/2 = ED$ и $\angle EDF = \angle DFE$. Но углы EDF и CBF равны как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC, а углы DFE и BFC равны как вертикальные. Поэтому $\angle CBF = \angle BFC$, откуда $BC = FC$.

4. *Квадрат 20×20 разбит на единичные квадратики. Несколько сторон единичных квадратиков стёрты, причем стёртые отрезки не имеют общих концов, а на верхней и правой сторонах квадрата стёртых отрезков нет. Докажите, что из левого нижнего угла квадрата можно добраться в правый верхний по нестёртым отрезкам.*

Решение. Из каждой вершины квадратика, кроме правой верхней вершины квадрата 20×20, можно сделать ход либо вправо, либо вверх — иначе два стертых отрезка имели бы общий конец. Поэтому, начав с левого нижнего угла квадрата 20×20 и сделав 40 таких ходов, мы попадем в его правый верхний угол.

5. *Вася вычислил суммы цифр у 200 последовательных натуральных чисел и выписал эти суммы в строку в некотором порядке. Петя выписал под ними суммы цифр еще каких-то 200 последовательных натуральных чисел (также в произвольном порядке). После чего Таня умножила каждое из Васиных чисел на число, написанное под ним, и получила в результате 200 последовательных натуральных чисел. Докажите, что кто-то из них ошибся.*

Решение. Число делится на 3 или на 9 тогда и только тогда, когда на 3 или на 9 соответственно делится сумма его цифр. Среди 200 последовательных чисел на 3 делится 66 или 67. Стало быть, среди сумм их цифр — тоже. Пусть среди Васиных чисел, делящихся на 3, ровно под k подписаны Петины числа, делящиеся на 3. Тогда произведений, делящихся на 3, будет не меньше, чем $k+2(66-k) = 132-k$. Если у Тани получилось 200 последовательных натуральных чисел, число $132-k$ должно быть не больше 67, откуда $k \geq 65$. Но тогда среди Таниных чисел будет хотя бы 65 таких, которые делятся на 9, а чисел, делящихся на 9, среди двухсот последовательных натуральных чисел не больше 23-х. Противоречие.