Четвертый тур дистанционного этапа V олимпиады имени Леонарда Эйлера

Решения задач, указания по проверке и оценке

1. *Из квадрата вырезали меньший квадрат, одна из сторон которого лежит на стороне исходного квадрата. Периметр полученного восьмиугольника на 40% больше периметра исходного квадрата. На сколько процентов его площадь меньше площади исходного квадрата?*

Ответ: На 64%. Решение. Пусть $ABCD$ — исходный квадрат со стороной 1 (и площадью 1), $KLMN$ — вырезанный квадрат со стороной x, причем KL лежит на AB (точка K ближе к A, чем L). Тогда периметр восьмиугольника $AKNMLBCD$ превосходит периметр квадрата $ABCD$ на $KN+LM = 2x = 0{,}4\cdot4AB = 1{,}6AB$. То есть $x = 0{,}8AB$, и площадь вырезанного квадрата составляет 0,64 площади исходного.

2. *Имеется три последовательных чётных числа. У первого из них нашли наибольший чётный собственный делитель, у второго — наибольший нечётный собственный делитель, у третьего — опять наибольший чётный собственный делитель. Может ли сумма трёх полученных делителей быть равна 2013? (Делитель натурального числа называется собственным, если он отличен от 1 и этого числа)*

Ответ: Да, может. Решение. Вот пример: 1340, 1342 и 1344. У первого числа наибольший чётный делитель равен 670, у третьего – 672, у второго наибольший нечётный делитель равен 671. 670+671+672 = 2013. Замечание. Есть два естественных способа додуматься до этого примера. Можно попытаться так подобрать тройку, чтобы первое число в ней делилось на 4, т.е. имело вид $4n$. Тогда следующее число равно $4n+2$, а третье $4n+4$. Но тогда ясно, что делители, о которых идёт речь в задаче, равны $2n$, $2n+1$, $2n+2$. Остаётся решить уравнение $2n+(2n+1)+(2n+2) = 2013$. А можно просто записать число 2013 в виде 670+671+672 = 2013 и удвоить каждое из слагаемых.

3. *В параллелограмме ABCD со стороной AB = 1 точка M — середина стороны BC, а угол AMD составляет 90 градусов. Найдите сторону BC.*

Ответ: 2. Первое решение. Проведем медиану MN в треугольнике AMD. $ABMN$ — параллелограмм, поскольку BM и AN равны и параллельны, значит, $MN = BC = 1$. Но медиана MN вдвое меньше гипотенузы AD в прямоугольном треугольнике AMD, откуда $BC = AD = 2$. Второе решение. Продлим отрезок AM и сторону CD до пересечения в точке K. Рассмотрим треугольник ADK. Отрезок MC параллелен основанию AD и равен его половине. Поэтому MC — средняя линия, $AM = MK$ и $KD = 2CD = 2$. Но в рассматриваемом треугольнике медиана DM совпадает с высотой, поэтому он равнобедренный и $AD = 2AB = 2$.

4. *Шарик и Матроскин ходят на лыжах по кольцевой трассе, половина которой представляет с собой подъем в гору, а половина — спуск с горы. На подъёме их скорости одинаковы и вчетверо меньше их скоростей на спуске. Минимальное отставание Шарика от Матроскина равно 4 км, а максимальное — 13 км. Найдите длину трассы.*

Ответ: 24 км. Решение. Минимальное отставание Шарика от Матроскина случается, когда Шарик находится в самой низкой точке трассы, а Матроскин — поднимается в гору (если в это время Матроскин спускается, то получается, что половина трассы короче 4 км, что, очевидно, невозможно). И оно сохраняется до тех пор, пока Матроскин не достигнет самой высокой точки. После этого Шарик поднимается еще 4 км в гору, а Матроскин спускается. Если бы Матроскин спускался все это время, то отдалился бы от Шарика (точнее, самой высокой точки) на 16 км. Но расстояние перестало возрастать, когда Матроскин опережал Шарика на 13 км, а, значит, Матроскин достиг самой низкой точки трассы и начал подниматься в гору. Поскольку отставание увеличивалось на 3 км за каждый километр, пройденный Шариком, а всего увеличилось на 9 км, то Шарику до самой высокой точки оставался 4–(13–4)/(4–1) = 1 км в то время, как Матроскин достиг самой низкой точки. Значит, длина спуска составляет 13–1 = 12 км, а всей трассы — 24 км.

5. *В стране лжецов и рыцарей (рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут) десяти людям выдали различные числа от 1 до 10. Потом каждого спросили: «Делится ли ваше число на 2?». Утвердительный ответ дали 3 человека. На вопрос «Делится ли ваше число на 4?» утвер-*

дительный ответ дали 6 человек. На вопрос «Делится ли ваше число на 5?» утвердительно ответили 2 человека. Какие числа получили лжецы?

Ответ: Лжецы получили номера 2, 5, 6, 10. Решение. Рассмотрим людей под номерами 4, 5, 8, 10. Ответы только этих людей на второй и третий вопросы могли отличаться. На второй вопрос ответило утвердительно на 4 человека больше, чем на третий. Это означает, что все люди под указанными номерами ответили «да» на второй вопрос и «нет» на третий. Но изменить ответ с «да» на «нет» могут только рыцари с номерами 4, 8, и лжецы с номерами 5, 10. Значит, номера 4 и 8 получили рыцари, а номера 5 и 10 — лжецы. Теперь ясно, что на второй вопрос все лжецы должны дать утвердительный ответ, и потому лжецов ровно четверо. В то же время на первый вопрос отвечают «да» только те лжецы, которые имеют нечётные номера и, значит, такой всего один (5), а лжецов с чётными номерами трое. Поэтому лжецам принадлежат оставшиеся «нераспределёнными» чётные номера 2 и 6, что и завершает решение.