XI МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ИМЕНИ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

**Решения заданий регионального этапа, 1 день**

**1.** *Операция* ***удвоения цифры*** *натурального числа состоит в умножении этой цифры на 2 (если это произведение оказывается двузначным, то цифра в следующем разряде числа увеличивается на 1, как при сложении «в столбик»). Например, из числа 9817 удвоениями цифр 7, 1, 8 и 9 можно получить числа 9824, 9827, 10617 и 18817 соответственно. Можно ли из числа 22..22 (20 двоек) несколькими такими операциями получить число 22...22 (21 двойка)?* (Н. Агаханов)

**Ответ**. Можно. **Решение**. Трижды удвоим первую цифру числа 22…22 (20 двоек). Получим число 1622..22 (21 цифра). Теперь удвоим цифру 6 и получим искомое число 22..22 (21 двойка). **Замечание**. Есть и другие способы.

**2.** *Каждый из 10 человек ⎯ либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжёт. Каждый из них задумал какое-то натуральное число. Затем первый сказал: «Мое число больше 1», второй сказал: «Мое число больше 2», ..., десятый сказал: «Мое число больше 10». После этого они же, выступая в другом порядке, сказали (каждый по одной фразе): «Мое число меньше 1», «Мое число меньше 2», ..., «Мое число меньше 10». Какое наибольшее число рыцарей могло быть среди этих 10 человек?* (О. Подлипский)

**Ответ**. 8. **Решение**. Те, кто в первой серии ответов сказали, что их числа больше 9 и 10, заведомо лжецы, потому что эти ответы не совместимы ни с каким из ответов второй серии. Значит, рыцарей не больше восьми. Пример, когда рыцарей ровно 8: у первых восьмерых в первой серии ответов задуманы числа 2, …, 9 соответственно, и они дают ответы «Мое число меньше 3», …, «Мое число меньше 10» во второй серии ответов. Каждый из двух лжецов задумал число 5, и они дают два последних ответа первой серии и два первых ответа второй серии.

**3.** *По кругу расставлены 100 натуральных чисел. Каждое из них разделили с остатком на следующее по часовой стрелке. Могло ли получиться 100 одинаковых ненулевых остатков?* (Н. Агаханов)

**Ответ**. Не могло. **Решение**. Допустим, *r* — указанный в условии остаток. Тогда каждое из стоящих по кругу чисел больше *r*. Значит, неполное частное при каждом из делений с остатком больше 0, и потому каждое из чисел больше следующего за ним по часовой стрелке. Но такое невозможно, так как, начав с некоторого числа *a* и обойдя по часовой стрелке круг, мы обнаружим, что число, за которым по часовой стрелке следует *a*, меньше, чем *a*, а должно быть больше.

**4.** *Имеется кубик, каждая грань которого разбита на 4 одинаковые квадратные клетки. Олег хочет отметить невидимыми чернилами 8 клеток так, чтобы никакие две отмеченные клетки не имели общей стороны. У Рустема есть детекторы. Если детектор помещен в клетку, чернила на ней делаются видимыми. Какое наименьшее число детекторов Рустем может поместить в клетки так, чтобы, какие бы клетки после этого Олег ни отметил, можно было определить все отмеченные клетки?* (Р. Женодаров, О. Дмитриев)

**Ответ**. 16. **Решение**. *Пример*. Разобьем все 24 клетки на восемь троек, где в каждую тройку входят три клетки, примыкающие к одной вершине кубика. У любых двух клеток из одной тройки есть общая сторона. Поскольку отмеченных клеток столько же, сколько троек, в каждой тройке должна быть ровно одна отмеченная клетка. Разместим 16 детекторов так, чтобы в каждой тройке было два детектора. Если в данной тройке один из детекторов сработал, мы нашли отмеченную в этой тройке клетку, если не сработали оба детектора --- отмечена клетка, где детектора нет. *Оценка*. Пусть мы разместили меньше 16 детекторов. Тогда найдется тройка, где есть хотя бы две клетки без детекторов (назовем их «свободными») ⎯ отметим ее клетки на изображенной справа развертке куба тёмными фоном. На этой же развёртке отметим 7 клеток буквой А так, как показано на рисунке. Теперь заметим, что если отметить невидимыми чернилами семь клеток А и одну из свободных клеток, то детекторы не позволят нам узнать, какая именно из свободных клеток отмечена. Поэтому меньше, чем 16 детекторами, обойтись не удастся.

**5.** *Периметр треугольника ABC равен 2. На стороне AC отмечена точка P, а на отрезке CP — точка Q так, что 2AP = AB и 2QC = BC. Докажите, что периметр треугольника BPQ больше 1.* (А. Кузнецов)

**Решение**. Положим *AB* = *c*, *AC* = *b*, *BC* = *a*. Нам требуется доказать, что *BP+BQ+PQ* > 1 = (*a*+*b*+*c*)/2. Поскольку *PQ* = *AC*−*AP*−*CQ* = *b*−(*a+c*)/2, надо доказать, что *BP+BQ*> (*a*+*b*+*c*)/2−*b*+(*a*+*c*)/2 = *a*+*c*−*b*/2.

Обозначим через *M* и *N* середины сторон *AB* и *BC* соответственно, а через *R* и *S* такие точки на лучах *AC* и *CA* соответственно, что *AR* = *AB*, *CS* = *CB*. Заметим, что *BP* = *RM* как медианы из вершин основания равнобедренного треугольника *BAR*. Аналогично, *BQ* = *SN*. Осталось заметить, что сумма *SN*+*RM* диагоналей трапеции *RNMS* больше суммы ее оснований *SR*+*MN* = (*AR+CS−AC*)+AC/2 =(*c+a−b*)−*b*/2 = *a*+*c*−*b*/2.