VII МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ИМЕНИ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

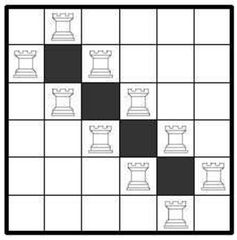
Решения заданий регионального этапа

1. *На доске написаны четыре числа, ни одно из которых не равно 0. Если каждое из них умножить на сумму трёх остальных, получатся четыре одинаковых результата. Докажите, что квадраты записанных на доске чисел равны.* (И. Рубанов).

Решение. Пусть записаны числа a, b, c и d. По условию $a(b+c+d) = b(a+c+d)$, откуда $(a–b)(c+d) = 0$. Аналогично, из равенства $c(a+b+d) = d(a+b+c)$ получаем $(c–d)(a+b) = 0$. Поскольку или $c+d$, или $c–d$ не равно 0, то либо $a = b$, либо $a = –b$. В обоих случаях квадраты чисел a и b равны, откуда в силу произвольности выбора a и b и следует утверждение задачи.

2. *Разрешается вырезать из шахматной доски размером 20×20 любые 18 клеток, а потом выставить на оставшиеся клетки несколько ладей, не бьющих друг друга. Какое наибольшее число ладей можно выставить таким образом? Ладьи бьют друг друга, если они стоят на одной горизонтали или вертикали доски и между ними нет вырезанных клеток.* (О. Дмитриев, Р. Женодаров)

Ответ. 38 ладей. **Решение**. Назовём вырезанные клетки *дырками*. Кроме них, добавим к каждой вертикали доски по дырке снизу, а к каждой горизонтали — по дырке справа; всего добавлено $2\cdot20 = 40$ дырок. Пусть на доске расставлено несколько ладей, не бьющих друг друга. Будем временно считать, что ладья бьёт только вправо и вниз. Тогда каждая ладья бьёт по одной дырке справа и снизу от себя (т. е. между ней и этими дырками нет ни других дырок, ни других ладей). С другой стороны, каждую из 18 исходных дырок на доске бьёт не более двух ладей (максимум по одной сверху и слева), а каждую из 40 добавленных дырок — не более одной ладьи. Значит, всего ладей на доске не более $(18\cdot2+40)/2 = 38$.

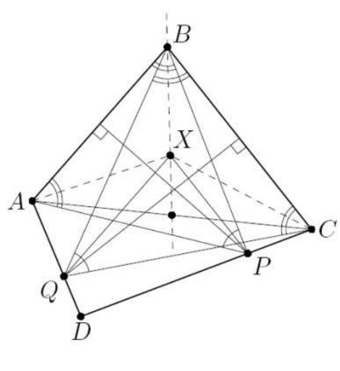


Осталось привести пример расстановки 38 ладей, удовлетворяющей условию. Для этого вырежем все клетки одной из главных диагоналей доски, кроме двух угловых, и поставим ладьи на все клетки, соседние по сторонам с вырезанными. На рисунке справа показан пример подобной расстановки на доске 6×6.

3. *Делитель натурального числа называется* ***собственным****, если он меньше этого числа, но больше 1. У натурального числа n нашли все собственные делители (их оказалось не меньше трёх) и записали всевозможные их попарные суммы (повторно одинаковые суммы не записывали). Докажите, что полученный набор не мог оказаться набором всех собственных делителей никакого натурального числа.* (А. Храбров)

Решение. Предположим, что полученный набор чисел оказался набором всех собственных делителей некоторого числа m. Поскольку у числа n хотя бы три собственных делителя, среди них найдутся два делителя одной чётности. Тогда их сумма чётна. Число m делится на эту сумму, значит, оно тоже чётно. Следовательно, число 2, являющееся собственным делителем числа m, также было выписано. Но это невозможно, поскольку сумма любых двух собственных делителей числа n больше, чем 2.

4. *Серединные перпендикуляры к сторонам AB и BC выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекают стороны CD и DA в точках P и Q соответственно. Оказалось, что $\angle APB = \angle BQC$. Внутри четырёхугольника выбрана точка X такая, что $QX \parallel AB$ и $PX \parallel BC$. Докажите, что прямая BX делит диагональ AC пополам.* (С. Берлов)



Решение. Достаточно доказать, что расстояния от точек A и C до прямой BX равны. Это равносильно тому, что $S_{ABX} = S_{BCX}$, поскольку у треугольников ABX и BCX общее основание BX. Поскольку $QX \parallel AB$, имеем $S_{ABX} = S_{ABQ}$. Аналогично, $S_{CBX} = S_{CBP}$. Заметим, что равнобедренные треугольники ABP и CBQ подобны по двум углам, поэтому $AB/BC = BP/BQ$, откуда $AB\cdot BQ = CB\cdot BP$. Так как $\angle ABP = \angle CBQ$, то и $\angle ABQ = \angle CBP$. Следовательно, площади треугольников ABQ и CBP относятся как произведения заключающих равные углы сторон, т. е. эти площади равны. Но тогда $S_{ABX} = S_{ABQ} = S_{CBP} = S_{CBX}$, что и требовалось доказать.

5. *На столе лежит палочка длиной 10 см. Петя ломает её на две части и кладёт обе получившиеся палочки на стол. С одной из лежащих на столе палочек Вася проделывает ту же* *операцию, потом то же делает Петя и т.д., по очереди. Петя хочет, чтобы после 18 разломов все получившиеся палочки были короче 1 см. Вася хочет помешать Пете. Кто из них имеет возможность добиться своей цели независимо от действий соперника?* (И. Рубанов, С. Берлов)

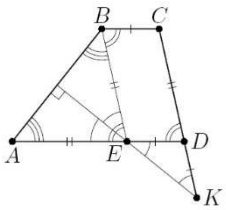
Ответ. Вася. **Решение**. Отметим 9 точек, делящих палочку на части длиной 1 см. Васе достаточно играть так, чтобы на все эти точки пришлись разломы. Так как у него 9 ходов, он сможет это сделать. В итоге после 18 разломов получится 10 палочек длиной 1 см, некоторые из которых разломаны на более мелкие части. Так как разломов, не приходящихся на отмеченные точки, всего 9, хотя бы одна из сантиметровых палочек останется целой, и Петя не добьётся своей цели.

6. *Зрители оценивают фильм целым числом баллов от 0 до 10. В каждый момент времени рейтинг фильма вычисляется как сумма всех выставленных оценок, делённая на их количество. В некоторый момент времени T рейтинг был целым числом, а затем с каждым новым проголосовавшим зрителем уменьшался на единицу. Какое наибольшее количество зрителей могло проголосовать после момента T?* (О. Дмитриев, Р. Женодаров)

Ответ. 5. **Решение**. Рассмотрим некоторый момент, когда рейтинг уменьшился на 1. Пусть перед этим проголосовало n человек, и рейтинг был целым числом x. Значит, сумма баллов стала равна nx. Пусть следующий зритель выставил y баллов. Тогда сумма баллов стала равна $nx+y = (n+1)(x-1)$, откуда $y = x-n-1$. Наибольшее возможное значение x равно 10, а наименьшее возможное значение n равно 1; значит, наибольшее значение y (на первом таком шаге) равно 8. С каждым следующим шагом значение x уменьшается на 1, а значение n увеличивается на 1.Следовательно, на втором шаге значение y не превосходит 6, на третьем — 4, и т.д. Поскольку любая оценка не меньше 0, число шагов не превосходит 5.

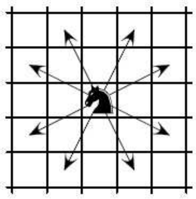
Осталось показать, что пять шагов возможны. Пусть рейтинг в момент T равен 10 (при одном проголосовавшем), затем второй зритель выставляет 8 баллов, третий — 6, четвёртый — 4, пятый — 2, а шестой — 0. Тогда рейтинг последовательно принимает значения 9, 8, 7, 6 и 5.

7. *В трапеции ABCD, где AD || BC, угол B равен сумме углов A и D. На продолжении отрезка CD за вершину D отложен отрезок DK = BC. Докажите, что AK = BK.* (Б. Обухов)



Решение. Отложим на луче DA отрезок $DE = BC$. Тогда четырёхугольник $DCBE$ — параллелограмм, поэтому $\angle CBE = \angle CDE$. Используя условие, получаем $\angle ABE = \angle ABC - \angle CBE = \angle ABC - \angle CDE = \angle BAE$; значит, треугольник ABE — равнобедренный, $AE = BE$. Далее, поскольку $ED = BC = KD$, получаем $\angle KED = \angle EKD = \angle CDE/2$. Так как $\angle AEB = \angle CDE$, прямая KE является биссектрисой угла AEB и, тем самым, серединным перпендикуляром к основанию AB равнобедренного треугольника AEB. Поэтому точка K равноудалена от концов отрезка AB, что и требовалось доказать.

8. *На шахматной доске размером 20×20 расставлены 220 коней, которые бьют все свободные клетки. Докажите, что можно убрать 20 коней таким образом, чтобы оставшиеся кони били все свободные клетки. Напомним, что конь бьёт буквой «Г» (см. рисунок).* (С. Берлов)



Решение. Будем убирать коней с доски по одному следующим образом. Если на очередном шаге можно убрать какого–то коня так, что оставшиеся будут бить все свободные поля, сделаем это. Если после некоторого шага останется 200 коней, мы получим требуемое.

6	5	8	7
2	1	4	3
5	6	7	8
1	2	3	4

Предположим, что в некоторый момент ни одного коня с сохранением нужного условия убрать нельзя. Разобьём клетки доски на пары, соединённые ходом коня (это можно сделать, например, как на рисунке справа). Назовём пару *полной*, если в ней стоят два коня, и *пустой*, если в ней нет коней; пусть на доске f полных и e пустых пар. Рассмотрим любого коня R, стоящего в полной паре. Если его убрать, его клетка окажется побитой парным к нему; значит, останется непобитой некоторая другая клетка C. Ясно, что она находится в пустой паре и бьётся только конём R; сопоставим клетку C коню R. Ясно, что разным коням сопоставлены разные клетки; поэтому общее количество сопоставленных клеток (оно не больше $2e$) равно $2f$, то есть $e \geq f$. Но общее количество коней равно $2f+(200-e-f) = 200+(f-e) \leq 200$. Значит, в момент, когда ни одного коня убрать нельзя, мы уже добились требуемого.