**ЛЕОНАРД ЭЙЛЕР атындағы VII МАТЕМАТИКАЛЫҚ ОЛИМПИАДА**
**3 (қорытынды) кезең, 25-28 наурыз 2015 ж.**

## БІРІНШІ КҮННІҢ ЕСЕПТЕР ШЕШІМІ

**1**. Қабырғалары 1 және 11 болатын тіктөртбұрышты және қабырғасы 2 болатын квадратты *жақсы* тіктөртбұрыштар деп атайық. Қабырға ұзындықтары 100-ден үлкен бүтін сан болатын тіктөртбұрыштарды жақсы тіктөртбұрыштарға бөлуге болатынын дәлелдеңіздер. (*С. Волчёнков*)

**Шешуі.** Өлшемі $2n \times 2m$ тіктөртбұрышты $2 \times 2$ квадраттарға бөлеміз. Өлшемі $(2n+1) \times 2m$ тіктөртбұрышты алдымен $11 \times 2m$ және $(2n-10) \times 2m$ тіктөртбұрыштарына, сосын біріншісін $1 \times 11$ тіктөртбұрыштарына, ал екіншісін — $2 \times 2$ квадраттарына бөлеміз. Ал өлшемі $(2n+1) \times (2m+1)$ тіктөртбұрышты алдымен $11 \times (2m+1)$, $(2n-10) \times 11$ және $(2n-10) \times (2m-10)$ тіктөртбұрыштарына, сосын алдыңғы екі тіктөртбұрышты $1 \times 11$ тіктөртбұрыштарына, ал үшіншісін $2 \times 2$ квадраттарына бөлеміз.

**2**. $ABC$ үшбұрышының $AB$ қабырғасы $BC$ қабырғасынан үлкен. $BC$ қабырғасының $C$ нүктесінен әрі қарай созындысынан $2BN = AB + BC$ болатындай $N$ нүктесін белгілеген. $BS$ — $ABC$ үшбұрышының биссектрисасы, $M$ — $AC$ қабырғасының ортасы, ал $L$ нүктесі $BS$ кесіндісіндегі $ML \parallel AB$ болатындай нүкте. $2LN = AC$ екенін дәлелдеңіздер. (*А. Антропов*)

**Шешуі.** $BN$-ды $N$-нен әрі қарай және $BL$-ды $L$-ден әрі қарай сәйкесінше $NN' = BN$ және $LL' = BL$ кесінділеріне созайық. $M$ — $AC$ қабырғасының ортасы және $ML \parallel AB$ болғандықтан, $ML$ түзуінде $ABC$ үшбұрышының $MK$ орта түзуі жатыр. $L$ — $BL'$ кесіндісінің ортасы болғандықтан, ол түзуде де $BCL'$ үшбұрышының $LK$ орта сызығы жатыр; сонымен, $CL' \parallel LM \parallel AB$. Сондықтан $\angle CL'B = \angle L'BA = \angle L'BC$, демек $CL' = CB$. Ары қарай, $CN' = BN' - BC = 2BN - BC = BA$ және $\angle N'CL' = \angle CBA$. Яғни, $N'CL'$ және $ABC$ үшбұрыштары тең, сондықтан $AC = N'L' = 2LN$.

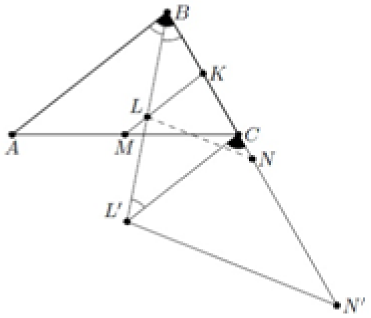


Рис. 1

**3**. Шеңбер бойымен 2015 оң сандар жазылған. Кез келген қатар келген екі санның қосындысы олардан кейін сағат бойымен тұрған екі сандарға кері сандардың қосындысынан үлкен. Берілген барлық 2015 санның көбейтіндісі 1-ден үлкен екенін дәлелдеңіз. (*А. Голованов, С. Берлов*)

**Шешуі.** Шеңбер бойымен $x_1, x_2, \ldots, x_{2015}$ сандары жазылсын. Келесі теңсіздіктер эквивалентті екенін байқайық: $a + b > \dfrac{1}{c} + \dfrac{1}{d} \Leftrightarrow (a+b)cd > c + d \quad (*)$. Есеп шартында берілген барлық 2015 теңсіздікті $(*)$ түрінде жазып алып, оларды көбейтіп, оң жақта $X \cdot (x_1 x_2 \ldots x_{2015})^2 > X$ теңсіздігін аламыз, бұл жерде $X = (x_1+x_2)(x_2+x_3)\ldots(x_{2014}+x_{2015})(x_{2015}+x_1)$. Теңсіздіктің екі жағын да $X$-ке бөліп, $(x_1 x_2 \ldots x_{2015})^2 > 1$ теңсіздігін аламыз, осыдан $x_1 x_2 \ldots x_{2015} > 1$ екені шығады.

**4**. Квадраттың әр қабырғасынан 100 нүктеден белгілеген. Әр нүктеден квадраттың ішіне қарай сәйкес қабырғаға перпендикуляр кесінді жүргізілген. Жүргізілген кесінділердің ешқандай екеуі бір түздің бойында жатпайтындай болып шыққан. Осы кесінділердің барлық қиылысу нүктелері белгіленген. $k < 200$ санының қандай ең үлкен мәнінде, әр жүргізілген кесіндіде дәл $k$ белгіленген нүкте жатады? (*Н. Авилов, И. Богданов*)

**Жауабы.** $k = 150$ болғанда.

**Шешуі.** *Бағалау.* $k > 150$ болғанда есепке мысал таптық деп санайық. Онымен $200 \times 200$ тақтасын салыстырайық, жолдарға көлденең кесінділер (төменнен жоғары қарай реттелген), ал бағандарға — тік кесінділерді (солдан оңға реттелген) сәйкестендірейік. Квадраттың тор көзінде 1 тұрсын, егер оған сәйкес кесінділер қиылысса, және 0 — егер қиылыспаса. Біздің болжау бойынша әр жолда және әр бағанда $200 - k < 50$ нөл жазылған. 51-ші мен 150-ші жолдар арасында кемінде бір жол 1-ден басталып 1-мен аяқталатынын байқайық (кері жағдайда біз бірінші және соңғы бағандарда барлығы ең кем дегенде 100 нөлден аламыз).

Оған сәйкес көлденең $T$ кесіндісі ең сол орналасқан және ең оң орналасқан бік кесінділерді қияды. Бірақ сол жолда нөлдер де бар. Яғни, қандай да бір $X$ кесінді $T$-ға жоғарыдан немесе төменнен «жетпей қалады». Онда $X$-қа сәйкес бағанда біздің жолдың немесе жоғары немесе төмен жағында тек нөлдер тұр. Ал ол деген сөз, олардын саны 50-ден кем емес. Қарама-қайшылық.

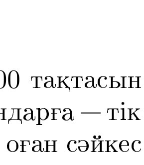

Рис. 2

**Мысал.** 2 суретте әр кесінді 50 мысалдағы бір біріне тең және параллель кесіндіні көрсетеді.

**ЛЕОНАРД ЭЙЛЕР атындағы VII МАТЕМАТИКАЛЫҚ ОЛИМПИАДА**
**3 (қорытынды) кезең, 25-28 наурыз 2015 ж.**

## ЕКІНШІ КҮННІҢ ЕСЕПТЕР ШЕШІМІ

**5**. 40 қарақшы екі орынды қайық арқылы сол жағадан оң жағаға ауысты (кейбір рейсті бір ғана қарақшы орындауы мүмкін). Орын ауыстыру кезінде қарақшылардың екі-екіден алған әр жұбы өзенді бірге дәл бір реттен ғана кесуі мүмкін бе (сол жағадан оң жағаға немесе оң жағадан сол жағаға)? (*А. Шаповалов*)

**Жауабы.** Жоқ, мүмкін емес.

**Шешуі.** Ондай жағдай мүмкін болсын дейік. Қайықтың жасайтын рейс саны тақ екенін байқайық. Қарақшылар жұптармен (екі адамнан) $40 \times 39/2 = 780$ рейс жасағандықтан, қайықпен өзенді жалғыз қарақшы кескен рейс саны тақ болу керек. Яғни, қандай да бір қарақшы қайықты өзі жалғыз тақ рет өзеннен өткізген. Бірақ, сол қарақшы басқа қарақшылармен де қайықпен өзенді тақ рет кесті (39 рет). Демек, ол бастапқы, яғни сол жағада қалған.

**6**. Егер қандай да бір натурал сан өзінің барлық натурал бөлгіштерінің қосындысынан екі есе кіші болса, ондай санды *кемелді* сан деп атаймыз: мысалға 6 саны кемелді, өйткені $2 \cdot 6 = 1 + 2 + 3 + 6$. Кемелді натурал $n$ санының бөлгіштерінің қос-қостан барлық көбейтінділерінің қосындысы $n^2$-қа бөліне алады ма? (*С. Берлов*)

**Жауабы.** Жоқ, бөліне алмайды.

**Шешуі.** Кемелді сан өзінен кіші бөлгіштердің қосындысына тең екенін байқайық. Кемелді $n$ санының сондай $d_1, \ldots, d_k$ (өзінен кіші) бөлгіштері болсын. Бөлгіштердің қос-қостан көбейтінділерінің қосындысы

$$nd_1 + \cdots + nd_k + d_1d_2 + d_1d_3 + \cdots + d_1d_k + d_2d_3 + \cdots + d_{k-1}d_k$$

санына тең. Ал $nd_1 + \cdots + nd_k = n(d_1 + \cdots + d_k) = n^2$ болғандықтан, онда $n^2$ санына $D = d_1d_2 + d_1d_3 + + \cdots + d_1d_k + d_2d_3 + \cdots + d_{k-1}d_k$ қосындысы бөлінбейтініне көз жеткізу жеткілікті. Ал ол солай, өйткені $0 < 2D = (d_1 + \cdots + d_k)^2 - \left(d_1^2 + \ldots + d_k^2\right) < n^2$.

**7**. Графиния елінде $n$ қала бар. Кейбір қалалар тұра (қонбай ұшып өтетін) авиажолымен қосылған (әр авиажолмен рейстер екі бағытта да орындалады). Кез келген қаладан ұшақпен кез келген басқа қалаға жетуге болады (басқа қала арқылы жету де мүмкін), бірақ, кез келген авиажолды жапса, ол шарт бұзылады. Сонымен қатар әр қаладан $d$-дан көп емес авиажол шығады. Графиния қаласының барлық қалаларын, әр авиажол әр түрлі топтағы екі қаланы қосатындай және кез келген екі топ үшін сол екі топты қосатын авиажол саны бірден аспайтындай, саны $\dfrac{n}{2} + d$ санынан аспайтын топ санына бөлуге болатынын дәлелдеңіз. (*Д. Карпов*)

**Шешуі.** Төбелер — қалалар, қабырғалар — авиажол болатын графты қарастырайық. Есеп шарты бойынша ол граф ағаш болып табылады, ал оның төбелерін, іргелес төбелерде әр түрлі нөмір болатындай, екі цифрмен нөмірлеп шығуға болатыны белгілі. Соны жасайық та, төбелердің жартысынан кем емесі қай цифрмен нөмірленсе, соларды қара қара түске бояйық. Қалған төбелерді әр түлі түске бояйық, ол үшін бізге $n/2$ түс жетеді. Төбелер саны бойынша индукциямен, кез келген ағаштың дәрежесі $d$-дан аспайтын қара төбелерін, көрші ортақ төбесі бар екі төбе әр түрлі түсті болатындай, әр түрлі $d$ түске бояуға болатынын дәлелдейік. Егер ағашта қара емес төбе болмаса, онда төбе тек жалғыз, сонымен біздің тұжырым айқын. Енді бізде қара емес $x$ төбе болсын. $y_1, \ldots, y_k$ — $x$ төбесінің көршілері болсын, олар қара және $k \leqslant d$ болады. Онда $x$ төбені алып тастаған кезде $k$ ағаш қалады да, және олардың әрқайсысы алдыңғыдан кіші болады, индукция тұжырымы бойынша бізге керектей боялана алады. Ағаштарды бояу бір-біріне тәуелді болмағандықтан, $y_1, \ldots, y_k$ төбелері әр түрлі түске бояланатындай бояу жүргізе аламыз, ал бізге керегі осы.

Есеп шешіміне келейік. Жоғарыда айтқандай, біздің ағаштың қара төбелерін бояп шығайық. Көрші $a_1b_1$ және $a_2b_2$ төбелер жұптарының түстер жинағы бірдей болсын деп болжайық. Онда сол жұптағы қара емес $a_1$ және $a_2$ төбелері беттеседі. Бірақ $a_1$ төбесінің барлық төбелері әр түрлі түсті, қарама-қайшылық.

**8**. $CK$ — $ABC$ үшбұрышының биссектрисасы. $BC$ және $AC$ қабырғаларынан $CT = BL$ және $TL = BK$ болатындай сәйкесінше $L$ және $T$ нүктелері алынған. $LTC$ үшбұрышы алдыңғы үшбұрышқа ұқсас екенін дәлелдеңіз. (*С. Берлов*)

**Шешуі.** $BLSK$ параллелограмм болатындай $S$ нүктесін белгілейік. Егер $S$ нүктесі $T$ нүктесімен беттессе, онда ұқсастық айқын. Егер $S$ нүктесі $T$-мен беттеспесе, онда $CT = BL = KS$ және $\angle SKC = \angle KCL = \angle KCA$ болғандықтан, $K$, $C$, $T$, $S$ нүктелері — теңбүйірлі трапеция төбелері болады. Ал $TL = KB = LS$, болғандықтан, $L$ нүктесі трапецияның симметрия өсінде жатыр, осыдан $\angle CTL = \angle KSL = \angle KBL$ екені шағады. Соңғы теңдіктерден ұқсастық шығады.

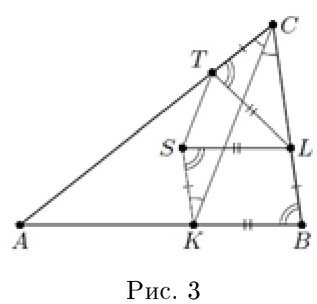


Рис. 3