7-toji Oilerio matematikos olimpiada

3 (baigiamasis) etapas, 2015 metų kovo 25-28

***Pirmoji diena***

1. Pavadinsime *geraisiais stačiakampiais* kvadratą, kurio kraštinės ilgis 2 ir stačiakampį, kurio kraštinės lygios 1 ir 11. Įrodykite, kad bet kurį stačiakampį, kurio kraštinių ilgiai yra sveikieji skaičiai, didesni už 100, galima sukarpyti geraisiais stačiakampiais.

2. Trikampio *ABC* kraštinė *AB* yra ilgesnė už kraštinę *BC*. Kraštinės *BC* tęsinyje, už taško *C,* pažymėjo tašką *N* taip, kad 2*BN* = *AB*+*BC*. *BS* — trikampio *ABC* pusiaukampinė, *M* — kraštinės *AC* vidurio taškas, o *L* — toks atkarpos *BS* taškas, kad *ML* || *AB*. Įrodykite, kad 2*LN* = *AC*. (А. Антропов)

3. Ratu užrašyta 2015 teigiamų skaičių. Bet kurių dviejų greta esančių skaičių suma yra didesnė už po jų, laikrodžio rodyklės kryptimi, einantiems dviem skaičiams atvirkštinių skaičių sumą. Įrodykite, kad visų šių skaičių sandauga yra didesnė už 1. (А. Голованов, С. Берлов)

4. Kiekvienoje kvadrato kraštinėje parinkta po 100 taškų, iš kiekvieno pasirinkto taško į kvadrato vidų išvesta atkarpa, statmena atitinkamai kvadrato kraštinei. Pasirodė, kad jokios dvi iš išvestų atkarpų nėra vienoje tiesėje. Pažymėkime visus šių atkarpų susikirtimo taškus. Su kuria didžiausia *k* < 200 reikšme gali atsitikti taip, kad kiekvienoje išvestoje atkarpoje yra lygiai *k* pažymėtų taškų? (Н. Авилов, И. Богданов)

7-toji Oilerio matematikos olimpiada

3 (baigiamasis) etapas, 2015 metų kovo 25-28

***Antroji diena***

5. 40 plėšikų persikėlė dviviete valtele iš kairiojo upės kranto į dešinįjį (kai kuriuos reisus, galbūt, atlikdami po vieną). Ar galėjo atsitikti taip, kad kiekviena plėšikų pora kirto upę kartu lygiai vieną kartą (iš kairiojo kranto į dešinįjį arba iš dešiniojo į kairįjį)? (А. Шаповалов)

6. Natūralųjį skaičių vadinsime *tobulu*, jis du kartus mažesnis už visų savo natūraliųjų daliklių sumą: pavyzdžiui, tobulas yra skaičius 6, kadangi 2⋅6 = 1+2+3+6. Ar gali visų tobulo skaičiaus *n* daliklių porų suma dalytis iš *n*2? (С. Берлов)

**7.** Grafinijos šalyje yra *n* miestų. Kai kurie miestai sujungti tiesiogiai skrendančiomis avialinijomis (kiekviena avialinija vykdo reisus abiem kryptimis) taip, kad galima lėktuvais iš bet kurio miesto (galbūt, su persėdimais) nuvykti iki bet kurio kito, tačiau bet kurios avialinijos uždarymas pažedžia šią taisyklę. Be to iš kiekvieno miesto išeina ne daugiau kaip *d* avialinijų. Įrodykite, kad visus Grafinijos miestus galima suskirstyti į ne daugiau kaip  grupių tokiu būdu, kad kiekviena avialinija jungtų skirtingų grupių miestus ir bet kurioms dviem grupėms egzistuotų ne daugiau kaip viena avialinija,jungianti miestus iš šių grupių. (Д. Карпов)

**8.** *CK* — trikampio *ABC* pusiaukampinė*.* Kraštinėse *BC* ir *AC* parinkti taškai *L* ir *T* atitinkamai tokie, kad *CT = BL* ir *TL = BK.* Įrodykite, kad trikampis,kurio viršūnės yra taškai *C*, *L* ir *T* yra panašus į pradinį. (С. Берлов)