**XI Oilerio olimpiados pirmojo etapo 1 turas**

**Uždavinių sprendimai**

***1.****Lentelė* $70×70$ *užpildyta skaičiais nuo 1 iki 4900: pirmoje eilutėje iš kairės į dešinę surašyti skaičiai nuo 1 iki 70 didėjimo tvarka; antroje eilutėje lygiai taip pat surašyti skaičiai nuo 71 iki 140 ir t.t.; paskutinėje eilutėje iš kairės į dešinę išrašyti skaičiai nuo 4831 iki 4900. Ar galima šioje lentelėje rasti tokį langelį, kad penkių skaičių, esančių jame ir keturiuose jam pagal kraštinę kaimyniniuose langeliuose, suma, būtų lygi 2018?*

Atsakymas. Negalima. Sprendimas. Iš sąlygos aišku, kad jeigu langelyje užrašytas skaičius *x*, tai jo viršuje užrašytas skaičius *x*−70, apačioje – skaičius *x*+70, kairėje – skaičius *x*−1, dešinėje – skaičius *x*+1. Penkių skaičių suma lygi 5*x*, t.y. dalijasi iš 5, o skaičius 2018 iš 5 nesidalija.

***2.****Už apvalaus stalo sėdi 100 žmonių. Kiekvienas iš jų arba riteris, arba melagis, arba keistuolis. Riteris visada sako tiesą, melagis visada meluoja. Keistuolis sako tiesą, jeigu jam iš kairės sėdi melagis; meluoja, jeigu jam iš kairės sėdi riteris; sako bet ką, jeigu jam iš kairės sėdi keistuolis. Kiekvienas pasakė: „Man iš dešinės sėdi melagis“. Kiek už stalo melagių? Išvardinkite visus galimus atvejus ir įrodykite, kad kitų nėra.)*

Atsakymas. 0 arba 50. Sprendimas. *Įvertinimas*. Tarkime, kad tarp sėdinčiųjų yra melagis. Tada jo dešinėje – riteris arba keistuolis. Bet kuris iš jų šioje situacijoje pasakys tiesą, reiškia, jo dešinėje – vėl melagis ir t.t., t.y. melagių – lygiai 50. *Pavyzdžiai.* Jeigu 0 melagių: už stalo vien keistuoliai, ir kiekvienas gali sumeluoti, kad jo dešinėje sėdi melagis. Jeigu 50 melagių: už stalo lyginėse vietose sėdi melagiai, o nelyginėse – keistuoliai arba riteriai (bet kuria tvarka).

***3.****Trapecijos ABCD šoninė kraštinė AB lygi įstrižainei BD. Taškas M – įstrižainės AC vidurio taškas. Tiesė BM kerta atkarpą CD taške E. Įrodykite, kad* $BE=CE$*.*

Sprendimas. Papildykime trikampį *ABC* iki lygiagretainio *ABCF*. Jo įstrižainė *BF* eina per tašką *M*, o, tuo pačiu, ir per tašką *E*. Kadangi *CF* = *AB* = *BD*, ir tiesė *CF*, lygiagretai tiesei *AB*, yra nelygiagreti tiesei *BD*, *BCFD* – lygiašonė trapecija. Jos įstrižainės *BF* ir *CD* sudaro lygius kampus su pagrindu *BC*. Taigi, trikampis *BEC* – lygiašonis su pagrindu *BC*, ką ir reikėjo įrodyti.

***4.****Aikštelėje stovi automobiliai. Tarp jų yra „Tojotų“, „Hondų“, „Škodų“, o taip pat kitų markių automobilių. Yra žinoma, kad ne „Hondų“ yra pusantro karto daugiau negu ne raudonų automobilių; ne „Škodų“ – pusantro karto daugiau negu ne geltonų automobilių; galiausiai, ne „Tojotų“ – dukart mažiau, negu raudonų ir geltonų automobilių kartu. Įrodykite, kad „Tojotų“ ne mažiau, negu „Hondų“ ir „Škodų“ kartu.*

Sprendimas. Tegu aikštelėje iš viso yra *C* automobilių, tarp kurių *T* „Tojotų“, *H* „Hondų“ ir *S* „Škodų“, o taip pat *X* raudonų ir *Y* geltonų. Pagal sąlygą *C*–*H* = 3(*C*–*X*)/2, *C*–*S* = 3(*C*–*Y*)/2, *C*–*T* = (*X*+*Y*)/2. Sudėję dvi pirmąsias lygybes, po panašių dėmenų sutraukimo, gauname: –*H*–*S* = *С*–3(*X*+*Y*)/2, iš kur *H*+*S* = –*С*+3(*C*–*T*)  3*T*+*H*+*S* = 2*С*. Pakeitę pastarosios lygybės dešinėje pusėje *C* į *H*+*S*+*T*, mes nepadidinsime jos ir gausim nelygybę 3*T*+*H*+*S* ≥ 2*H*+2*S*+2*T*  *T* ≥ *H*+*S*, ką ir reikėjo įrodyti.

***5.****Žiogas pradeda judėti iš kairiojo viršutinio lentelės* $10×10$ *langelio. Jis gali šokinėti gretimą langelį žemyn arba į dešinę. Be to, žiogas gali iš bet kurio stulpelio apatinio langelio perskristi į viršutinį to paties stulpelio langelį, o iš paties dešiniausio bet kurios eilutės stulpelio perskristi į tos pačios eilutės patį kairiausią langelį.Įrodykite, kad žiogui reikės mažiausiai 9 perskridimų, kad pabuvotų kiekviename kvadrato langelyje bent po vieną kartą.*

Sprendimas. Neperskridęs, žiogas gali patekti iš langelio *K*, kur jis yra, tiktai į langelius to stačiakampio, kurio *K* – kairysis viršutinis langelis. Nuspalvinkime raudonai 10 langelių, priklausančių kvadrato įstrižainei, einančiai iš dešiniojo viršutinio langelio į kairįjį apatinį. Stačiakampis, kurio kairiajame viršutiniame kampe yra raudonas langelis, daugiau raudonų langelių neturi. Todėl, eidami tiktai žemyn ir į dešinę, žiogas negalės patekti iš vieno raudono langelio į kitą, neperskrisdamas, iš ko seka uždavinio teiginys.