XI Oilerio olimpiados pirmojo etapo 1 turas

Uždavinių sprendimai

1. *Lentelė* 70×70 *užpildyta skaičiais nuo 1 iki 4900: pirmoje eilutėje iš kairės į dešinę surašyti skaičiai nuo 1 iki 70 didėjimo tvarka; antroje eilutėje lygiai taip pat surašyti skaičiai nuo 71 iki 140 ir t.t.; paskutinėje eilutėje iš kairės į dešinę išrašyti skaičiai nuo 4831 iki 4900. Ar galima šioje lentelėje rasti tokį langelį, kad penkių skaičių, esančių jame ir keturiuose jam pagal kraštinę kaimyniniuose langeliuose, suma, būtų lygi 2018?*

Atsakymas. Negalima. Sprendimas. Iš sąlygos aišku, kad jeigu langelyje užrašytas skaičius x, tai jo viršuje užrašytas skaičius $x–70$, apačioje – skaičius $x+70$, kairėje – skaičius $x–1$, dešinėje – skaičius $x+1$. Penkių skaičių suma lygi $5x$, t.y. dalijasi iš 5, o skaičius 2018 iš 5 nesidalija.

2. *Už apvalaus stalo sėdi 100 žmonių. Kiekvienas iš jų arba riteris, arba melagis, arba keistuolis. Riteris visada sako tiesą, melagis visada meluoja. Keistuolis sako tiesą, jeigu jam iš kairės sėdi melagis; meluoja, jeigu jam iš kairės sėdi riteris; sako bet ką, jeigu jam iš kairės sėdi keistuolis. Kiekvienas pasakė: „Man iš dešinės sėdi melagis“. Kiek už stalo melagių? Išvardinkite visus galimus atvejus ir įrodykite, kad kitų nėra.)*

Atsakymas. 0 arba 50. Sprendimas. *Įvertinimas*. Tarkime, kad tarp sėdinčiųjų yra melagis. Tada jo dešinėje – riteris arba keistuolis. Bet kuris iš jų šioje situacijoje pasakys tiesą, reiškia, jo dešinėje – vėl melagis ir t.t., t.y. melagių – lygiai 50. *Pavyzdžiai.* Jeigu 0 melagių: už stalo vien keistuoliai, ir kiekvienas gali sumeluoti, kad jo dešinėje sėdi melagis. Jeigu 50 melagių: už stalo lyginėse vietose sėdi melagiai, o nelyginėse – keistuoliai arba riteriai (bet kuria tvarka).

3. *Trapecijos ABCD šoninė kraštinė AB lygi įstrižainei BD. Taškas M – įstrižainės AC vidurio taškas. Tiesė BM kerta atkarpą CD taške E. Įrodykite, kad* $BE = CE$.

Sprendimas. Papildykime trikampį ABC iki lygiagretainio $ABCF$. Jo įstrižainė BF eina per tašką M, o, tuo pačiu, ir per tašką E. Kadangi $CF = AB = BD$, ir tiesė CF, lygiagretai tiesei AB, yra nelygiagreti tiesei BD, $BCFD$ – lygiašonė trapecija. Jos įstrižainės BF ir CD sudaro lygius kampus su pagrindu BC. Taigi, trikampis BEC – lygiašonis su pagrindu BC, ką ir reikėjo įrodyti.

4. *Aikštelėje stovi automobiliai. Tarp jų yra „Tojotų“, „Hondų“, „Škodų“, o taip pat kitų markių automobilių. Yra žinoma, kad ne „Hondų“ yra pusantro karto daugiau negu ne raudonų automobilių; ne „Škodų“ – pusantro karto daugiau negu ne geltonų automobilių; galiausiai, ne „Tojotų“ – dukart mažiau, negu raudonų ir geltonų automobilių kartu. Įrodykite, kad „Tojotų“ ne mažiau, negu „Hondų“ ir „Škodų“ kartu.*

Sprendimas. Tegu aikštelėje iš viso yra C automobilių, tarp kurių T „Tojotų“, H „Hondų“ ir S „Škodų“, o taip pat X raudonų ir Y geltonų. Pagal sąlygą $C–H = 3(C–X)/2$, $C–S = 3(C–Y)/2$, $C–T = (X+Y)/2$. Sudėję dvi pirmąsias lygybes, po panašių dėmenų sutraukimo, gauname: $–H–S = C–3(X+Y)/2$, iš kur $H+S = –C+3(C–T) \Leftrightarrow 3T+H+S = 2C$. Pakeitę pastarosios lygybės dešinėje pusėje C į $H+S+T$, mes nepadidinsime jos ir gausim nelygybę $3T+H+S \geq 2H+2S+2T \Leftrightarrow T \geq H+S$, ką ir reikėjo įrodyti.

5. *Žiogas pradeda judėti iš kairiojo viršutinio lentelės* 10×10 *langelio. Jis gali šokinėti gretimą langelį žemyn arba į dešinę. Be to, žiogas gali iš bet kurio stulpelio apatinio langelio perskristi į viršutinį to paties stulpelio langelį, o iš paties dešiniausio bet kurios eilutės stulpelio perskristi į tos pačios eilutės patį kairiausią langelį.Įrodykite, kad žiogui reikės mažiausiai 9 perskridimų, kad pabuvotų kiekviename kvadrato langelyje bent po vieną kartą.*

Sprendimas. Neperskridęs, žiogas gali patekti iš langelio K, kur jis yra, tiktai į langelius to stačiakampio, kurio K – kairysis viršutinis langelis. Nuspalvinkime raudonai 10 langelių, priklausančių kvadrato įstrižainei, einančiai iš dešiniojo viršutinio langelio į kairįjį apatinį. Stačiakampis, kurio kairiajame viršutiniame kampe yra raudonas langelis, daugiau raudonų langelių neturi. Todėl, eidami tiktai žemyn ir į dešinę, žiogas negalės patekti iš vieno raudono langelio į kitą, neperskrisdamas, iš ko seka uždavinio teiginys.