Бірінші күннің есептер шешімі.

1. Бір ауылда әрқашан да шындықты айтатын серілер мен әрқашан өтірік айтатын өтірікшілер тұрады. Саяхатшы ауылдың әр тұрғынына екі сұрақтан қойды: «Ауылда қанша сері бар?» және «Серілер саны мен өтірікшілер санының айырмасы қанша?». Ауылда кемінде бір серінің бар екенін саяхатшы біледі. Ол тұрғындардан алған жауаптар бойынша кімнің сері, ал кімнің өтірікші екенін дәл анықтай алады ма? (С. Берлов)

Жауабы. Әрқашан да емес.

Шешуі. Ауылда алты тұғын болсын. Олардың біріншісі: «Бір сері. 4.», тағы екеуі: «Екі сері. 2.», ал қалған үшеуі: «Үш сері. 0.» деген жауаптар берсін. Сонда бірінші болып жауап берген тұрғын ғана сері болуы мүмкін; немесе одан кейін жауап берген екі тұрғын ғана; немесе соңғы болып жауап берген үш тұрғын ғана сері болуы мүмкін. Демек біз дәл анықтай алмаймыз.

2. Эйлерии елінде 101 қала бар. Кез келген екі қала 99 авиакомпанияның қандай да бір біреуінің екі бағытты тұра рейсімен қосылған. Әр қаладан барлық 99 авиакомпанияның рейстері шығатыны белгілі. Егер үш қаланың кез келген екеуі қос-қостан бірдей авиякомпания рейсімен қосылса, онда оларды *үшбұрыш* деп атайық. Эйлерии елінде үшбұрыш саны 1-ден көп емес екенін дәлелдеңіздер. (И. Богданов, Д. Карпов)

Шешуі. Бір қаладан шығатын бірдей авиакомпания рейстерін *қанат белгісі* деп атайық. Әр қаладан 100 рейс шығады. Және олардың 99-ы әртүрлі. Сондықтан әр қала дәл бір қанат белгісінің ортасы болып табылады, ал барлық қанат белгісінің саны 101-ге тең.

Эйлерии елінде кемінде екі үшбұрыш болсын. Олардың әрқайсысы бір авиакомпанияның үш қанат белгісін тудырады. Онда қалған 97 немесе 98 авиакомпанияға ең көп дегенде 95 қанат белгісі қалады. Яғни, қандай да бір авиякомпания қанатсыз қалады. Ол деген сөз әр қаладан сол авиякомпаның бір ғана рейсі шығады. Әр рейстің екі ұшы бар, демек сол ұштардың қосындысы жұп санға тең. Ал әр қалып жеке алып қарасақ, олардың саны 101-ге, яғни тақ санға тең болу керек. Қарама-қайшылық.

3. Теңқабырғалы ABC үшбұрышы берілген. AB қабырғасының A-дан ары қарай созындысынан D, BC қабырғасының C-дан ары қарай созындысынан E, ал AC қабырғасының C-дан ары қарай созындысынан F нүктелері $CF = AD$ және $AC + EF = DE$ болатындай алынған. BDE бұрышын табыңыз. (А. Кузнецов)

Жауабы. 60°.

Шешуі. ACE үшбұрышын $ACEG$ параллелограмына дейін толықтырайық. $CF = AD$, $CE = AG$ және $\angle FCE = \angle DAG = 60^\circ$ болғандықтан, DAG және FCE үшбұрыштары тең, осыдан $GD = EF$. Демек, $DE = AC + EF = GE + GD$. Яғни,G нүктесі DE кесіндісінде жатыр, және сондықтан $DE \parallel AC$. Осыдан $\angle BDE = \angle BAC = 60^\circ$ екені шығады.

4. Натурал k саны мен $2n$-таңбалы натурал a саны берілген. a және ka сандарын жеке ленталарға жазып, әр лентаны соңынан бастап екі таңбалы сандарға қиды (00, 01, …, 09 сандары да екі таңбалы болып саналады; егер ka санының цифрлар саны тақ болса, онда оның алдына 0 цифрын жазады). a санынан алған барлық екі таңбалы сандар қатаң түрде оңнан солға қарай кемиді (a-ның кіші разрядынан үлкен разрядына қарай), ал ka саны үшін ол қатар қатаң түрде өседі. $k \geqslant n$ екенін дәлелдеңіз. (О. Нечаева, С. Берлов)

Бірінші шешім. a және k сандарын 100-дік жүйе негізіндегі сандар түрінде жазайық. a және ka сандарынан пайда болған екітаңбалы сандар сол жүйеде цифрлар болады. Ары қарай «цифр» деген мағынада сол 100-ік жүйедегі цифрларды айтатын боламыз. Сол жүйеде $a = \overline{a_n \ldots a_1}$ болсын.

a-ны k-ға «бағанмен» көбейтуді қарастырайық. 2-ден n-ге дейінгі барлық i үшін $b_i = ka_i + c_i$ деп алайық, бұл жерде c_i — $(i-1)$-ші разрядтан i-ші разрядқа ауысуын айтамыз. Және де $b_1 = ka_1$, $c_1 = 0$ деп алайық. ka көбейтіндісінің i-ші цифры барлық $i = 1, \ldots, n$ үшін b_i санын 100-ге бөлгендегі r_i қалдыққа тең екенін байқайық.

Индукция арқылы 2-ден n-ге дейінгі барлық i үшін $c_i < k$ екенін көрсетейік. c_i-дің b_{i-1}-ді 100-ге бөлгендегі толық емес бөлінді екенін байқайық. Сондықтан $c_i \geqslant k \Leftrightarrow b_{i-1} \geqslant 100k$. Ал $b_1 = ka_1 \leqslant 99k$ болғандықтан, c_2 ауысуы k-дан кіші — база тексерілді. Индукциялық өтуді дәлелдейік. $c_i < k$ болсын. Онда $b_i = ka_i + c_i < 99k + k = 100k$, осыдан $c_{i+1} < k$.

$k < n$ болсын. Онда $k \leqslant n-1$, ал жоғарыдағы дәледеуден барлық c_i $n-2$-ден аспайтыны шығады. Яғни, Дирихле қағидасы бойынша c_i-лардың арасында бірдей екеуі табылады: $c_u = c_v = m$. $b_v = 100m + r_v$, $b_u = 100m + r_u$ және $v > u$ болсын. Онда $b_v = ka_v + c_v \leqslant k(a_u - 1) + c_v < ka_u \leqslant b_u$, осыдан $r_u > r_v$, бұл бізге керек талапқа қарама-қайшылық (ka-ның цифрлары кіші разрядтан үлкен разрядқа өсу керек).

Екінші шешім. Барлық $i = 0, 1, \ldots, n-1$ үшін A_i арқылы $100^i \cdot a$ санын 10^{2n} санына бөлгендегі қалдықты, ал B_i арқылы санын $100^i \cdot ka$ санына 10^{2n} бөлгендегі қалдықты белгілейік. A_i және B_i сандары теріс емес, бірақ 10^{2n} санынан кіші; сонымен қатар олардың ондық жүйедегі жазылуы сәйкесінше a және ka сандарының соңғы $2(n-i)$ цифрларының жазылуынан басталады. Сонда есеп шартынан $A_0 < A_1 < \ldots < A_{n-1}$ және $B_0 > B_1 > \ldots > B_{n-1}$ теңсіздіктері шығады. Сонымен қатар, $kA_i \equiv B_i \pmod{10^{2n}}$.

$kA_i = B_i + 10^{2n} \cdot t_i$ болсын. Онда $10^{2n} \cdot t_i = kA_i - B_i > kA_{i-1} - B_{i-1} = 10^{2n} \cdot t_{i-1}$, яғни $0 \leqslant t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1}$. Балық t_i — бүтін теріс емес сандар болғандықтан, $t_{n-1} \geqslant n-1$, осыдан $10^{2n}(n-1) \leqslant 10^{2n} \cdot t_{n-1} \leqslant kA_{n-1} < 10^{2n} \cdot k$. Сонымен, $n - 1 < k$, Дәлелдеу керегі осы еді.

Екінші күннің есептер шешімі.

5. 1000×2016 тіктөртбұрышын 1×2015 тіктөртбұрыштарына және үш шаршыдан құралған бұрыштарға, осы фигуралардың екі түрі де кездесетіндей бөлуге болады ма? (Е. Бакаев)

Жауабы. Болмайды.

Шешуі. Кері жориық. Есеп шарты орындалатындай етіп кию болсын. 1×2015 тіктөртбұрышын A, ал $1000\times$ $\times\, 2016$ тіктөртбұрышын B деп белгілейік. A-ның әрқайсысы B-ның кіші қабырғасының біреуіне тиіп тұратыны және басқа қабырғасынан бір шаршы алшақ тұратыны айқын. A-ны *қара* деп арайық (сәйкесінше *ақ* деп), егер егер сол шаршыны жабатын бұрыштың екі шаршысы сол тіктөртбұрыштан жоғары (сәйкесінше төмен) жатса.

Ең төмен орналасқан A қара болуы тиісті. Кері жағдайда оның астында саны 3-ке бөлінбейтін $(2016\times k_1-2)$ шаршы саны қалады. Одан кейін орналасқан A қара болса, онда сол екеуінің арасында жатқан тіктөртбұрышта 3-ке бөлінбейтін $(2016 \times k_2 - 2)$ бос шаршы қалады. Ал егер одан кейін жатқан A ақ болса, олардың арасында тағы да 3-ке бөлінбейтін $(2016 \times k_3 - 4)$ шаршы бос қалады. Олардың ешқайсысын да үш шаршыдан құралған бұрыштармен жауып шаға алмаймыз.

6. Мектепте 30 үйірме бар, және әр үйірмеге 40 бала қатысады. Әр $i = 1, 2, \ldots, 30$ үшін n_i арқылы дәл i үйірмеге қатысатын балалар санын белгілейік. Жаңа үйірмелер үшін n_i сандары сол қалпы қалатындай, осы мектепте әр үйірмеге 30 бала қатысатындай жаңадан 40 үйірме ұйымдастыруға болатынын дәлелдеңіз. (В. Дольников)

Шешуі. Бірінші үйірме оқушыларын бір қатарға тізіп шығып, сосын сол қатардың артына екінші үйірменің оқушыларын, және тағы сол сияқты ары қарай қалғандарын тізіп шығайық. Осылай тізген кезде, егер оқушы i үйірмесіне де, $(i+1)$ үйірмесіне де қатысса, біз оны $(i+1)$ үйірмесіндегі тізімне ол i-де қандай нөмірмен жазылса, сондай нөмірмен жазамыз. Пайда болған ұзын тізімді ұзындығы 30 болатын жаңа бөлікке кесу арқылы, біз бізге керек 40 жаңа үйірме аламыз. Осы үйірмелер есеп шартын қанағаттандыратынын байқайық. Осындай жағдайда екшім бір үйірмеге екі рет түспейді, өйткені ұзын тізімді құру кезінде бір оқушының оған түсу арасы 40-тан кем емес, демек ол 30-дан да кем емес.

7. Теріс емес a, b, c және d сандарының қосындысы 4-ке тең. $(ab + cd)(ac + bd)(ad + bc) \leqslant 8$ теңсіздігін дәлелдеңіздер. (А. Храбров)

Шешуі. $\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)} \leqslant \frac{ab+cd+ac+bd}{2} = \frac{(a+d)(b+c)}{2} \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{a+b+c+d}{2}\right)^2 = 2$. Дәл сол сияқты, $\sqrt{(ab+cd)(ad+bc)} \leqslant 2$ және $\sqrt{(ac+bd)(ad+bc)} \leqslant 2$. Осы үш теңсіздікті көбейтіп, бізге керек теңсіздікті аламыз.

8. $ABCD$ параллелограмы берілген. AB және BC қабырғаларынан және CD қабырғасының D-дан ары қарай созындысынан сәйкесінше K, L және M нүктелері $\triangle KLM = \triangle BCA$ (міндетті түрде осындай сәйкес төбелермен) болатындай алынған. KM кесіндісі AD кесіндісін N нүктесінде қисын. $LN \parallel AB$ екенін дәлелдеңіз. (Б. Обухов)

Бірінші шешім. L нүктесі арқылы KM-ге параллель түзу жүргізейік. Сол түзу AB және CD түзулерін сәйкесінше P және Q нүктелерінде қисын. BCA және KLM үшбұрыштарының сәйкесінше C және L төбелерінен түсірілген биіктіктері тең. Екінші жағынан олар өзара параллель AB, CD және KM, PQ түзулерінің арақашықтығына тең. Яғни осы түзулер $KPQM$ ромбын құрайды. Демек, $PK = KM = AB$. Осындан $BP =$ $= KP - KB = AB - KB = AK$. Сонымен қатар, түзулердің параллельдігінен $\angle AKN = \angle BPL$ және $\angle NAK =$ $= \angle LBP$ теңдіктерін аламыз. Яғни AKN және BPL үшбұрыштары тең, жеке элементтерін алғанда $AN = BL$. Сондықтан $ANLB$ — параллелограмм, және $LN \parallel AB$.

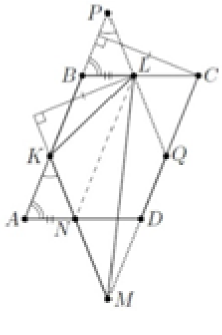

Рис. 1

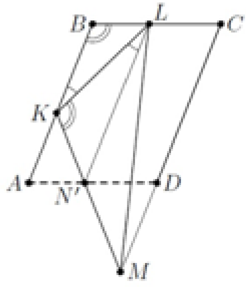

Рис. 2

Екінші шешім. L нүктесі арқылы AB-ға параллель түзу жүргізейік. Сол түзу KM түзуін N' нүктесінде қисын. Сонда $\angle BKL = \angle KLN'$; және есеп шарты бойынша $\angle KBL = \angle LKN'$. Демек, BKL және KLN' үшбұрыштары екі бұрыш бойынша ұқсас, осыдан $KN'/BL = LN'/KL = LN'/BC$ қатынасын аламыз (соңғы қатынас $KL = BC$ болғандықтан орындалады). Сонымен қатар $MKBC$ трапециясында $N'L$ кесіндісі оның табандарына параллель. Яғни $KN'/BL = KM/BC = AB/BC$. Демек, $LN'/BC = KN'/BL = AB/BC$, осыдан $LN' = AB$ теңдігі шығады. Яғни, $ABLN'$ — параллелограмм, ал ол деген сөз, N' AD-да жатыр, ал сондықтан, ол N нүктесімен беттеседі. Осыдан $LN \parallel AB$.