

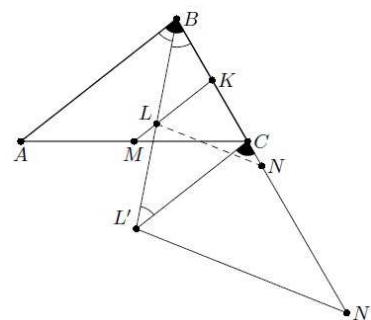
VII олимпиада имени Леонарда Эйлера, заключительный этап

Решения заданий первого дня.

1. Назовём *хорошими* прямоугольниками квадрат со стороной 2 и прямоугольник со сторонами 1 и 11. Докажите, что любой прямоугольник с целочисленными сторонами, большими 100, можно разрезать на хорошие прямоугольники. (С. Волчёнков)

Решение. Прямоугольник $2n \times 2m$ разрежем на квадраты 2×2 . Прямоугольник $(2n+1) \times 2m$ сначала разрежем на прямоугольники $1 \times 2m$ и $(2n-1) \times 2m$, потом первый разрежем на прямоугольники 1×11 , а второй — на квадраты 2×2 . Наконец, прямоугольник $(2n+1) \times (2m+1)$ сначала разрежем на прямоугольники $1 \times (2m+1)$, $(2n-1) \times 11$ и $(2n-1) \times (2m-1)$, затем два первых прямоугольника разрежем на прямоугольники 1×11 , а последний прямоугольник — на квадраты 2×2 .

2. В треугольнике ABC сторона AB больше стороны BC . На продолжении стороны BC за точку C отметили точку N так, что $2BN = AB + BC$. Пусть BS — биссектриса треугольника ABC , M — середина стороны AC , а L — такая точка на отрезке BS , что $ML \parallel AB$. Докажите, что $2LN = AC$. (А. Антропов)



Решение. Продлим BN за N и BL за L на отрезки $NN' = BN$ и $LL' = BL$ соответственно. Так как M — середина AC и $ML \parallel AB$, прямая ML содержит среднюю линию MK треугольника ABC . Поскольку L — середина BL' , эта прямая содержит также среднюю линию LK треугольника BCL' ; итак, $CL' \parallel LM \parallel AB$. Поэтому $\angle CL'B = \angle L'BA = \angle L'BC$, откуда $CL' = CB$. Далее, $CN' = BN' - BC = 2BN - BC = BA$ и $\angle N'CL' = \angle CBA$. Значит, треугольники $N'CL'$ и ABC равны, и потому $AC = N'L' = 2LN$.

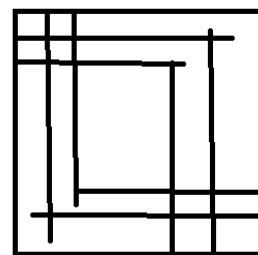
3. По кругу написаны 2015 положительных чисел. Сумма любых двух рядом стоящих чисел больше суммы обратных к двум следующим за ними по часовой стрелке. Докажите, что произведение всех этих чисел больше 1. (А. Голованов, С. Берлов)

Решение. Пусть по кругу стоят числа $x_1, x_2, \dots, x_{2015}$. Заметим, что $a+b > \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \cdot (a+b)cd > c+d$ (*).

Записав в форме (*) все 2015 данных в условии неравенств и перемножив их, получим неравенство $X \cdot (x_1 x_2 \dots x_{2015})^2 > X$, где $X = (x_1 + x_2)(x_2 + x_3) \dots (x_{2014} + x_{2015})(x_{2015} + x_1)$. Поделив обе части этого неравенства на X , получим неравенство $(x_1 x_2 \dots x_{2015})^2 > 1$, откуда $x_1 x_2 \dots x_{2015} > 1$.

4. На каждой стороне квадрата выбрано по 100 точек, из каждой выбранной точки внутрь квадрата проведён отрезок, перпендикулярный соответствующей стороне квадрата. Оказалось, что никакие два из проведённых отрезков не лежат на одной прямой. Отметим все точки пересечения этих отрезков. При каком наибольшем $k < 200$ может случиться так, что на каждом проведённом отрезке лежит ровно k отмеченных точек? (Н. Авилов, И. Богданов)

Ответ. При $k = 150$. **Решение.** Оценка. Допустим, возможен пример с $k > 150$. Сопоставим ему таблицу 200×200 , строки которой соответствуют горизонтальным отрезкам (упорядоченным снизу вверх), а столбцы — вертикальным (упорядоченным слева направо). В ячейке таблицы стоит 1, если соответствующие отрезки пересекаются, и 0 — если нет. По нашему предположению в каждой строке и каждом столбце по $200 - k < 50$ нулей. Заметим, что среди строк от 51 до 150 есть хотя бы одна, которая и начинается, и заканчивается на 1 (иначе мы имеем в первом и последнем столбцах вместе минимум 100 нулей). Соответствующий ей горизонтальный отрезок T пересекает как самый левый, так и самый правый вертикальные отрезки. Но в этой строке есть и нули, значит, некоторый отрезок X «недотягивает» до T сверху или снизу. Тогда в соответствующем отрезку X столбце либо сверху, либо снизу от нашей строки стоят только нули, а, значит, их не менее 50. Противоречие. *Пример.* На рисунке справа. Каждый из отрезков изображает 50 параллельных и равных между собой отрезков примера.



VII олимпиада имени Леонарда Эйлера, заключительный этап

Решения заданий второго дня.

5. 40 разбойников переправились с помощью двухместной лодки с левого берега реки на правый (некоторые рейсы, возможно, выполнялись в одиночку). Могло ли случиться, что каждая пара разбойников пересекла реку вместе ровно один раз (с левого берега на правый или с правого на левый)? (А. Шаповалов)

Ответ. Нет, не могло. **Решение.** Допустим, что могло. Заметим, что лодка должна сделать нечётное число рейсов. Поскольку с парами разбойников она сделала $40 \cdot 39/2 = 780$ рейсов, то должно быть нечётное число рейсов с одиночными разбойниками. Следовательно, кто-то из разбойников нечётное число раз перегонял лодку в одиночку. Но с другими разбойниками он тоже сделал нечётное число (39) рейсов, поэтому всего — чётное число. Значит, он остался на исходном берегу.

6. *Натуральное число называется совершенным, если оно вдвое меньше суммы всех своих натуральных делителей: например, совершенным является число 6, так как $2 \cdot 6 = 1 + 2 + 3 + 6$. Может ли сумма всех попарных произведений натуральных делителей совершенного числа n делиться на n^2 ?* (С. Берлов)

Ответ. Не может. **Решение.** Заметим, что совершенное число равно сумме всех своих натуральных делителей, меньших его самого. Пусть у совершенного числа n такие делители равны d_1, \dots, d_k . Сумма всех попарных произведений его делителей равна $nd_1 + \dots + nd_k + d_1d_2 + d_1d_3 + \dots + d_1d_k + d_2d_3 + \dots + d_{k-1}d_k$. Так как $nd_1 + \dots + nd_k = n(d_1 + \dots + d_k) = n^2$, достаточно убедиться, что на n^2 не делится сумма $D = d_1d_2 + d_1d_3 + \dots + d_1d_k + d_2d_3 + \dots + d_{k-1}d_k$. А это так, потому что $0 < 2D = (d_1 + \dots + d_k)^2 - (d_1^2 + \dots + d_k^2) < n^2$.

7. В стране Графинии n ($n \geq 2$) городов. Некоторые города соединены беспосадочными авиалиниями (по каждой авиалинии выполняются рейсы в обоих направлениях) таким образом, что из любого города можно самолётами (возможно, с пересадками) добраться до любого другого, но закрытие любой авиалинии нарушает это свойство. При этом из любого города выходит не больше d авиалиний.

Докажите, что все города Графинии можно разбить не более чем на $\frac{n}{2} + d$ групп таким образом, чтобы каждая авиалиния соединяла города из разных групп и для любых двух групп существовало не более одной авиалинии, соединяющей города из этих групп. (Д. Карпов)

Решение. Рассмотрим граф, где вершины — города, а рёбра — авиалинии. По условию он является деревом, вершины которого, как известно, можно занумеровать двумя цифрами так, чтобы любые две смежные вершины были отмечены разными цифрами. Сделаем это и покрасим в чёрный цвет вершины, отмеченные той цифрой, которой отмечено не меньше половины всех вершин. Остальные вершины покрасим в разные цвета, для этого хватит $n/2$ цветов. Докажем индукцией по количеству вершин, что черные вершины любого дерева, у которого степени всех вершин не превосходят d , можно перекрасить в d цветов так, чтобы две вершины, имеющие общую соседнюю, были разноцветными. Так как $n \geq 2$, у дерева есть не чёрная вершина x . Пусть y_1, \dots, y_k — соседи вершины x , они черные и $k \leq d$. Тогда при удалении вершины x получается k деревьев, каждое из которых меньше исходного и может быть покрашено по предположению индукции. Так как покраски этих деревьев независимы, можно покрасить их так, чтобы все вершины y_1, \dots, y_k имели разные цвета, что нам и нужно. Вернемся к задаче и покрасим черные вершины нашего дерева, как сказано выше. Предположим, что пары соседних вершин a_1b_1 и a_2b_2 имеют одинаковые наборы цветов. Тогда не чёрные вершины a_1 и a_2 в этих парах совпадают. Но все соседи вершины a_1 разноцветны, противоречие.

8. *СК — биссектриса треугольника ABC. На сторонах BC и AC выбраны точки L и T соответственно такие, что $CT = BL$ и $TL = BK$. Докажите, что треугольник с вершинами в точках C, L и T подобен исходному.* (С. Берлов)

Решение. Отметим такую точку S , что $BLSK$ — параллелограмм. Если S совпала с T , то подобие очевидно. Если же S не совпала с T , то поскольку $CT = BL = KS$ и $\angle SKC = \angle KCL = \angle KCA$, точки K, C, T, S — вершины равнобедренной трапеции. Так как $TL = KB = LS$, то точка L лежит на оси симметрии этой трапеции, следовательно, $\angle CTL = \angle KSL = \angle KBL$, откуда и следует требуемое подобие.

