XVIII МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ИМЕНИ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

Решения заданий заключительного этапа, 1 день

1. *Назовем натуральное число k-хорошим, если оно представимо в виде суммы k последовательных натуральных чисел. Учитель попросил Васю придумать число n, и обещал поставить по пятерке за каждое k, большее 1 и меньшее 7, при котором n окажется k-хорошим. Какое наибольшее число пятерок мог получить Вася?* (Методсовет)

Ответ. 4. **Решение**. Оценка. Заметим, что сумма двух идущих подряд натуральных чисел всегда нечетна, а четырех идущих подряд — всегда четна. Поэтому число n не может одновременно быть 2-хорошим и 4-хорошим, и Вася не мог получить больше четырех пятерок. Пример. Сумма двух идущих подряд чисел m и $m+1$ равна $2m+1$, трех идущих подряд, начиная с l — $3l+3 = 3(l+1)$, пяти идущих подряд, начиная с s — $5s+10 = 5(s+2)$, шести идущих подряд, начиная с t — $6t+15 = 3(2t+5)$. Поэтому если Вася примет за n достаточно большое нечетное число, делящееся на 3 и 5, то он сможет найти подходящие m, l, s и t. Например, при $n = 45$ имеем $m = 22$, $l = 14$, $s = 7$, $t = 5$.

2. *В классе учится больше 6, но меньше 60 учеников, и в нём организовано семь кружков. Каждый ученик класса посещает одинаковое количество кружков. Известно, что для любых двух кружков найдутся ровно три ученика, которые посещают их оба. Сколько учеников может быть в таком классе?* (Ф. Фот)

Ответ. 21. **Решение**. Пусть в классе u учеников, и каждый посещает k кружков. Подсчитаем количество T троек, составленных из ученика и двух кружков, которые он посещает. С одной стороны, для каждой пары кружков есть три таких тройки, поэтому $T = 3\cdot(7\cdot 6/2) = 63$. С другой стороны, для каждого ученика есть $k(k-1)/2$ таких троек. Значит, $uk(k-1) = 126$. По условию $u \geq 7$, поэтому $k(k-1) \leq 18$, откуда $k \leq 4$. При $k = 4$ получаем нецелое u, при $k = 2$ $u > 60$. При $k = 3$ получаем $u = 21$. **Замечание**. Примером может служить класс, в котором кружкам соответствуют вершины, середины сторон и центр равностороннего треугольника, а тройкам учеников, посещающим три данных кружка — стороны, медианы и вписанная окружность треугольника. Но построение примера в решении не обязательно, поскольку его существование постулировано в условии задачи.

3. *Неотрицательные числа a, b и c таковы, что $a^2+b^2+c^2 = a+b+c$. Докажите, что*

$$\frac{(a-1)^2}{b+c+1}+\frac{(b-1)^2}{c+a+1}+\frac{(c-1)^2}{a+b+1}\leqslant\frac{3}{1+a+b+c}.$$ (А. Кузнецов)

Первое решение. Положим для краткости $s = a+b+c$. Так как $(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2 = 3-s$, нам надо доказать неравенство

$$\frac{(a-1)^2}{b+c+1}+\frac{(b-1)^2}{c+a+1}+\frac{(c-1)^2}{a+b+1}\leq\frac{3}{a+b+c+1}=\frac{(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2+s}{1+s}.$$

Сгруппируем

$$\left(\frac{(a-1)^2}{b+c+1}-\frac{(a-1)^2}{s+1}\right)+\left(\frac{(b-1)^2}{c+a+1}-\frac{(b-1)^2}{s+1}\right)+\left(\frac{(c-1)^2}{a+b+1}-\frac{(c-1)^2}{s+1}\right)\le\frac{s}{1+s}=\frac{a+b+c}{1+s}.$$

Приведем разность в первой скобке к общему знаменателю:

$$\frac{(a-1)^2}{b+c+1}-\frac{(a-1)^2}{s+1}=\frac{a(a-1)^2}{(b+c+1)(1+s)}$$

и докажем, что эта дробь не превосходит $\frac{a}{1+s}$:

$$\frac{(a-1)^2}{b+c+1}\le 1 \Leftrightarrow b+c+1-(a-1)^2 = 2a+b+c-a^2 = a+b^2+c^2 \ge 0.$$

Аналогично, две другие скобки не превосходят $\frac{b}{1+s}$ и $\frac{c}{1+s}$. Осталось сложить три полученных неравенства.

Второе решение. $a^2+b^2+c^2 = a+b+c \Leftrightarrow (2a-1)^2+(2b-1)^2+(2c-1)^2 = 3$, откуда $a < 2$ и $(a-1)^2 < 1$. Поэтому $\frac{(a-1)^2}{1+b+c}<\frac{(a-1)^2+a}{1+a+b+c}$. В самом деле, $(a-1)^2(1+a+b+c) < ((a-1)^2+a)(1+b+c) \Leftrightarrow a(a-1)^2 < a(1+b+c) \Leftrightarrow (a-1)^2 < 1+b+c$, что верно, так как $(a-1)^2 < 1$, а $1+b+c \ge 1$. Аналогично $\frac{(b-1)^2}{1+c+a}<\frac{(b-1)^2+b}{1+a+b+c}$ и $\frac{(c-1)^2}{1+c+a}<\frac{(c-1)^2+c}{1+a+b+c}$. Складывая три полученных неравенства, находим, что $\frac{(a-1)^2}{b+c+1}+\frac{(b-1)^2}{c+a+1}+\frac{(c-1)^2}{a+b+1}$ меньше, чем

$\frac{a^2-a+1+b^2-b+1+c^2-c+1}{1+a+b+c}=\frac{3}{1+a+b+c}$, что и требовалось доказать.

Третье решение. Докажем, что $\frac{(a-1)^2}{b+c+1}\leqslant\frac{1}{1+a+b+c}$ (*). Складывая это неравенство с двумя аналогичными для b и c, получим требуемое. Умножив неравенство (*) на произведение знаменателей, после приведения подобных членов получим равносильное неравенство $a+(a^2-2a)(1+a+b+c) \le 0$. При $a = 0$ оно верно. При $a \ne 0$, поделив обе его части на a, получим $1+(a-2)(1+a+b+c) \le 0$. Теперь достаточно доказать, что $(2-a)(1+a) \ge 1 \Leftrightarrow a^2-a \le 1$. Для этого заметим, что $(a^2-a)+(b^2-b)+(c^2-c) = 0$ и каждая из двух последних скобок не меньше, чем $-1/4$, так что a^2-a не превосходит даже $1/2$.

4. *Дана замкнутая тысячезвенная ломаная, в которой длины всех звеньев равны, никакие два конца несоседних звеньев не совпадают и никакой конец одного из звеньев не лежит внутри другого звена. При каком наибольшем k может случиться, что каждое звено пересекает хотя бы k из оставшихся звеньев под прямым углом?* (А. Кузнецов)

Ответ. При $k = 250$. **Решение**. Оценка. Допустим, все звенья ломаной параллельны двум взаимно перпендикулярным прямым. Тогда все звенья ломаной являются сторонами квадратов некоторой квадратной сетки, и никакие два звена не могут пересекаться в точках, отличных от своих концов, то есть $k = 0$. В противном случае существуют по крайней мере четыре попарно не параллельные прямые, каждой из которых параллельно некоторое количество звеньев ломаной. Среди этих прямых найдется такая, которой параллельны не более 250 звеньев. Тогда каждое звено, перпендикулярное этой прямой, пересечено перпендикулярным звеном не более 250 раз. Таким образом, $k \le 250$. Пример. Возьмем квадрат со стороной 125. Каждую его сторону разделим на 125 отрезков длины 1 и на каждом отрезке, как на основании, построим равнобедренный треугольник с высотой 125, направленный внутрь квадрата. Ломаная, образованная боковыми сторонами этих треугольников — искомая.