

XVIII МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ИМЕНИ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

Решения заданий регионального этапа, 1 день

1. В каждом столбце таблицы 10×10 записаны сверху вниз в порядке возрастания степени двойки: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512. Как пройти из какой-либо клетки верхней строки таблицы в какую-либо клетку нижней, сдвигаясь на каждом ходу на клетку вправо или на клетку вниз, чтобы сумма чисел во всех пройденных клетках равнялась 2026? Достаточно найти один пример. (И. Рубанов)

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
8	8	8	8	8	8	8	8	8	8
16	16	16	16	16	16	16	16	16	16
32	32	32	32	32	32	32	32	32	32
64	64	64	64	64	64	64	64	64	64
128	128	128	128	128	128	128	128	128	128
256	256	256	256	256	256	256	256	256	256
512	512	512	512	512	512	512	512	512	512

Решение. Возможный путь

показан на рисунке крупными жирными цифрами. Его поиски облегчаются, если предварительно представить число 2026 в виде суммы степеней двойки: $2026 = 2 + 8 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512 + 1024$.

2. Числа a, b, c таковы, что $a^2 + b^2 > (a+b)^2$ и $b^2 + c^2 > (b+c)^2$. Что больше: $c^4 + a^4$ или $(a+c)^4$? (А. Кузнецов, И. Рубанов)

Ответ. $(a+c)^4$. **Решение.** $a^2 + b^2 > (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \Leftrightarrow ab < 0$. Аналогично $bc < 0$. Таким образом, числа a и b имеют разные знаки, числа c и b — тоже. Значит, числа a и c имеют один знак, то есть $ac > 0$. Следовательно, $(a+c)^4 - (a^4 + c^4) = 4a^3c + 6a^2c^2 + 4ac^3 = ac(4a^2 + 6ac + 4c^2) > 0$, откуда $(a+c)^4 > a^4 + c^4$.

3. В треугольнике ABC точка K — середина биссектрисы BL . Известно, что $AK = AL$ и $AK \perp BC$. Найдите величину угла ABC . (П. Кожевников)

Ответ. 60° . **Решение.** Положим $\angle ABC = 2\beta$, $\angle ACB = 2\gamma$. Пусть прямые AK и BC пересекаются в точке H . Из треугольника ABH $\angle BAH = 90^\circ - 2\beta$. Из треугольника AKB

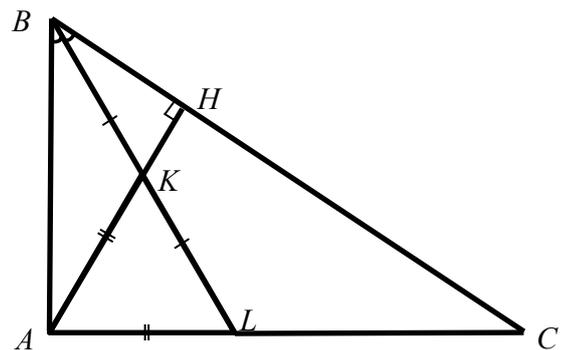
$$\angle AKB = 180^\circ - \angle ABK - \angle BAH = 90^\circ + \beta.$$

Далее,

$$\angle ALK = \angle ALB = \angle LCB + \angle LBC = \beta + 2\gamma$$

и $\angle AKL = 180^\circ - \angle AKB = 90^\circ - \beta$. Так как по условию $AK = AL$, углы ALK и AKL равны, то есть $\beta + 2\gamma = 90^\circ - \beta$, откуда $2\beta + 2\gamma = 90^\circ$ и $\angle BAC = 180^\circ - (2\beta + 2\gamma) = 90^\circ$. Таким образом, AK — медиана треугольника BAL , проведенная из вершины его прямого угла, откуда $AL = AK = KL$. Значит, $\angle ALB = 60^\circ$, откуда $\beta = \angle ABL = 30^\circ$ и $\angle ABC = 2\beta = 60^\circ$.

4. В электронную таблицу, где две строки и n столбцов, в произвольном порядке записаны все натуральные числа от 1 до $2n$ (в каждой клетке — одно число). В полдень каждого дня компьютер случайным образом выбирает столбец, где число из



верхней строки больше числа из нижней, и меняет эти два числа местами, а затем случайным образом переставляет числа в верхней строке. В момент, когда в каждом столбце верхнее число оказывается меньше нижнего, процесс заканчивается. Докажите, что такой процесс не может происходить дольше, чем n^2 дней. (Р. Баринов, М. Магин)

Первое решение. Заметим, что разность суммы чисел в верхней строке таблицы и суммы чисел в ее нижней строке не больше, чем $(2n+(2n-1)+\dots+(n+1))-(n+(n-1)+\dots+1) = n^2$ и не меньше, чем $-n^2$. Каждая перемена компьютером мест двух чисел в столбце уменьшает эту разность минимум на 2. Поэтому таких перемен не может произойти больше, чем $(n^2-(-n^2))/2 = n^2$. **Второе решение.** Назовем пару чисел (a, b) *плохой*, если число a стоит в верхнем ряду, число b — в нижнем (не обязательно в той же колонке, что и a), и $a > b$. Пусть компьютер поменял в какой-то колонке местами числа x и y , где $x > y$. После этого исчезнет плохая пара (x, y) . Так как вниз пошло большее число, там, где образовалась плохая пара с x снизу, была плохая пара и с y снизу, а там, где образовалась плохая пара с y сверху, была и плохая пара с x сверху. Значит, число плохих пар за одну перестановку чисел в столбце уменьшается хотя бы на 1. От перестановки чисел в строке оно не меняется. Так как число плохих пар изначально не больше общего количества пар (a, b) , где число a стоит в верхнем ряду, а число b — в нижнем, равного n^2 , перестановок чисел в столбцах будет сделано не более, чем n^2 .

5. Существует ли такое натуральное число n , что для каких-то трёх его делителей a, b, c , больших 1, произведение $(a-1)(b-1)(c-1)$ делится на n^2 ? (Р. Ишкуватов)

Ответ. Не существует. **Решение.** Допустим, такое n существует. Так как числа a и $a-1$ взаимно просты, произведение $(b-1)(c-1)$ должно делиться на a^2 , откуда $a^2 \leq (b-1)(c-1)$. Аналогично $b^2 \leq (a-1)(c-1)$, $c^2 \leq (a-1)(b-1)$. Перемножив три полученных неравенства, получаем невозможное неравенство $a^2b^2c^2 \leq (a-1)^2(b-1)^2(c-1)^2$.