

ХII МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ИМЕНИ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

Решения заданий регионального этапа, 1 день

1. Сумму цифр шестизначного числа умножили на произведение его цифр. Получилось 390. Найдите хотя бы одно такое шестизначное число. (И. Рубанов)

Решение. $390 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13$. Явным кандидатом на роль суммы цифр является простое число 13. И действительно, $13 = 2+3+5+1+1+1$. Поэтому подойдет любое шестизначное число, в записи которого есть по одной двойке, тройке и пятерке и три единицы, например, 111235.

2. На доске написано n целых чисел, любые два из которых отличаются хотя бы на 3. Сумма квадратов двух наибольших из них меньше 500. Сумма квадратов двух наименьших из них также меньше 500. При каком наибольшем n это возможно? (Р. Женодаров, С. Берлов)

Ответ. При $n = 12$. **Решение.** Оценка. Рассмотрим второе по величине число. Если оно не меньше 15, то самое большое число не меньше 18, и сумма квадратов двух наибольших чисел не меньше, чем $15^2 + 18^2 = 549 > 500$, что невозможно. Поэтому второе по величине число не превосходит 14. Аналогично второе с конца число не меньше, чем -14 . Таким образом, все искомые числа, кроме, может быть, наибольшего и наименьшего, не больше 14 и не меньше -14 . Так как $14 - (-14) = 28 < 3 \cdot 10$, написанные на доске числа разбивают отрезок числовой оси между -14 и 14 не более чем на 9 частей, то есть всего между -14 и 14 не более 8 наших чисел. Так как это все наши числа, кроме, может быть, двух наибольших и двух наименьших, всего на доске написано не более 12 чисел. *Пример.* $-17, -14, -11, -8, -5, -2, 2, 5, 8, 11, 14, 17$.

3. Биссектриса угла A выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекает сторону CD в точке K . Оказалось, что $DK = BC$ и $KC + AB = AD$. Докажите, что $\angle BCD = \angle ADC$. (С. Берлов)

Решение. Пусть точка D' симметрична D относительно прямой AK . Тогда $BC = DK = D'K$ и $KC = AD - AB = AD' - AB = BD'$, откуда следует равенство треугольников $BD'K$ и BCK по трём сторонам. Тогда $\angle BCK = \angle BD'K = \angle AD'K = \angle ADK = \angle ADC$.

4. На полуокружности расположено 50 точек. Любые две точки, между которыми не более 9 других точек, соединены отрезком. Степенью точки назовём количество отрезков, выходящих из неё. Панда и Вомбат играют в игру. Ходят по очереди, начинает Панда. Панда своим ходом может стереть один отрезок, соединяющий точки, сумма степеней которых чётна. Вомбат может своим ходом стереть один отрезок, соединяющий точки, сумма степеней которых нечётна. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из зверей выиграет при правильной игре? (С. Берлов)

Ответ. Панда. **Решение.** Если Панда не может сделать ход, то любой отрезок соединяет вершину четной и нечетной степени. В этом случае количество отрезков равняется сумме степеней точек с четной степенью, следовательно, обязательно делится на два. Посчитаем (последовательно, начиная с крайней точки) сколько отрезков было изначально: $(10+11+\dots+18+19+30 \cdot 20+19+18+\dots+11+10)/2 = 10 \cdot 29/2 + 30 \cdot 10$, что не делится на 2. Так как за один ход количество отрезков уменьшается ровно на 1, перед ходом Панды всегда будет нечетное число отрезков. Следовательно, Панда всегда может сделать ход. Очевидно, игра закончится, поэтому Панда победит.

5. Замкнутая ломаная состоит из 1001 звена и такова, что никакие три ее вершины не лежат на одной прямой. Известно, что каждое ее звено, кроме, может быть, двух, пересекает все 998 звеньев, не имеющих с ним общих концов. Верно ли, что каждое из двух оставшихся звеньев тоже пересекает все 998 звеньев, не имеющих с ним общих концов? (Р. Женодаров, О. Дмитриев, жюри)

Ответ. Верно. **Решение.** Назовём два звена, названных в условии, особыми. По условию с каждым особым звеном пересекаются все не соседние с ним не особые. Поэтому достаточно доказать, что, если особые рёбра (назовём их p и q) не соседние, то они пересекаются. Если это не так, то одно из них (скажем, p) не пересекает прямую, содержащую другое (*). Пусть наша ломаная — это $A_1A_2 \dots A_{1001}$, где A_1A_2 — ребро q . Пусть ребро p — это A_kA_{k+1} .

Поскольку рёбра A_1A_{1001} и A_2A_3 — не особые, они пересекаются. Значит, точки A_{1001} и A_3 лежат в одной полуплоскости относительно прямой A_1A_2 . Далее, каждое ребро A_iA_{i+1} , где $i \neq k$ и $3 \leq i \leq 999$, пересекает A_1A_2 , то есть точки A_i и A_{i+1} лежат в разных полуплоскостях относительно A_1A_2 . Поскольку точки A_3 и A_{1001} лежат в одной полуплоскости (и число 1001 нечётно), отсюда следует, что все точки A_i с нечётными i лежат в той же полуплоскости, а с чётными i — в другой. Но тогда точки A_k и A_{k+1} лежат в разных полуплоскостях относительно A_1A_2 , что противоречит нашему предположению (*).

Решения заданий регионального этапа, 2 день

6. Петя и Вася стартуют по круговой дорожке из одной точки в направлении против часовой стрелки. Оба бегут с постоянными скоростями, скорость Васи вдвое больше скорости Пети. Петя все время бежит против часовой стрелки, а Вася может менять направление бега, если он перед этим пробежал полкруга или больше в одном направлении. Покажите, что пока Петя бежит первый круг, Вася может трижды, не считая момента старта, поравняться (встретиться или догнать) с ним. (И. Рубанов)

Решение. Поделим дорожку на шесть равных частей последовательными точками A_1, \dots, A_6 так, чтобы бегуны стартовали из точки A_1 в направлении A_2 . Добежав до A_4 , Вася поворачивает и в точке A_3 впервые встречает Петю. Затем Вася продолжает бежать по часовой стрелке, пока не встретит Петю во второй раз в точке A_5 . Пробежав еще по часовой стрелке не дальше точки A_4 , Вася поворачивает (он имеет на это право, так как перед этим пробежал по часовой стрелке более половины дорожки) и обгоняет Петю не позже, чем тот добежит до финиша, так как Пете после второй встречи осталось бежать до точки A_1 треть круга, а Васе — не более двух третей круга.

7. Зелёный хамелеон всегда говорит правду, а коричневый хамелеон врёт, после чего зеленеет. В компании из 2019 хамелеонов каждый по очереди ответил на вопрос, сколько среди них сейчас зелёных. Ответами были числа 1, 2, 3, ..., 2019 (в некотором порядке, не обязательно в указанном выше). Какое наибольшее число зелёных хамелеонов могло быть изначально? (Р. Женодаров, О. Дмитриев)

Ответ. 1010. **Решение.** Оценка. Присвоим хамелеону, высказавшемуся первым, номер 1, высказавшемуся вторым — номер 2 и т.д. Разобьем хамелеонов на пары: 1 с 2, 3 с 4, ..., 2017 с 2018. Получим 1009 пар и одиночного хамелеона 2019. Оба хамелеона из одной пары не могут быть зелеными, так как тогда они назвали бы одинаковые числа. Поэтому зеленых хамелеонов не более 1010. *Пример.* Пусть все нечетные хамелеоны — зеленые, четные — коричневые. Первый говорит — 1010, второй — 1 и становится зеленым. Тогда третий говорит — 1011, четвертый — 2 и т. д. Нечетные произнесут все числа от 1010 до 2019, а четные — от 1 до 1009.

8. Можно ли отметить в ряду всех натуральных чисел бесконечно много чисел так, чтобы разность любых двух отмеченных чисел (где из большего вычитается меньшее) была квадратом натурального числа? (А. Голованов)

Ответ. Нельзя. **Решение.** Пусть так отметить числа можно. Пронумеруем отмеченные числа в порядке возрастания: $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$. Положим $b_n = a_{n+1} - a_n$. По условию в последовательности $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ любое число является квадратом натурального числа. Кроме того, квадратом является любая сумма $b_k + b_{k+1} + \dots + b_n = a_{n+1} - a_k$. Пусть $b_2 + \dots + b_n = (c_n)^2$. Очевидно, $c_1 < c_2 < \dots < c_n < \dots$. Поэтому найдется такое n , что $2c_{n+1} > b_1$. Сумма $b_1 + b_2 + \dots + b_n$ должна быть квадратом некоторого натурального числа d . При этом $d^2 > (c_n)^2$, откуда $d^2 \geq (c_n + 1)^2 = (c_n)^2 + 2c_n + 1 > (c_n)^2 + b_1 = d^2$. Противоречие.

9. В строку выписано 1999 натуральных чисел. Во вторую строку под каждыми двумя соседними числами выписали их наибольший общий делитель. Аналогичным образом получили третью, четвертую и т. д. строки. Может ли 1000-я строка состоять из 1000 последовательных чисел в некотором порядке? (С. Берлов)

Ответ. Не может. **Решение.** Назовем число a из таблицы предком числа b , если от a до b можно добраться сверху вниз по цепочке описанных в условии наибольших общих делителей (НОД). Двигаясь по строкам снизу вверх, нетрудно убедиться, что у каждого числа a из 1000-ой строки 1000 предков из первой строки, все эти предки идут в строке подряд, и a равно их НОД. Пусть числа a и b из 1000-ой строки делятся на простое число p . Тогда делятся на p и все предки каждого из них. Если число c записано в 1000-ой строке между a и b , то каждый его предок является также предком либо a , либо b . Поэтому c также делится на p . Но среди 1000 последовательных чисел найдутся числа, дающие при делении на 30 остатки 6, 10 и 15, которые, в силу доказанного, не могут стоять ни в каком порядке, так как любые два из них делятся на простое число, на которое не делится третье.

10. На средней линии равностороннего треугольника ABC , параллельной стороне BC , взята точка D . Точка E на продолжении стороны BA за точку A такова, что $\angle ECA = \angle DCA$. Точка F на продолжении стороны CA за точку A такова, что $\angle FBA = \angle DBA$. Докажите, что точка A лежит на средней линии треугольника DEF , параллельной стороне EF . (А. Кузнецов)

Решение. Обозначим через P и Q середины сторон AB и AC , а через M и N — точки, в которых DE и DF пересекают стороны AC и AB соответственно. Тогда треугольник DPB будет подобен треугольнику FAB по двум углам ($\angle DBP = \angle FBA$ по условию, $\angle BPD = \angle BAF = 120^\circ$) с коэффициентом 2, поскольку $AB = 2PB$. Тогда по свойству биссектрисы $DN/NF = DB/BF = 1/2$. Аналогично $DM/ME = 1/2$. Следовательно, $S_{\Delta FAE} = 2S_{\Delta FDA}$ (так как сторона AF у треугольников общая, а отношение опущенных на нее высот равно $DM/ME = 1/2$) и, аналогично, $S_{\Delta FAE} = 2S_{\Delta EDA}$, откуда $S_{\Delta FDE} = 2S_{\Delta FAE}$, и потому высота из вершины A на EF вдвое меньше высоты из вершины D на EF , откуда и вытекает утверждение задачи.