Первый тур дистанционного этапа IX олимпиады имени Леонарда Эйлера

Решения задач

1. *Какое наименьшее количество цифр можно вычеркнуть из числа 20162016 так, чтобы результат делился на 2016 (ничего не вычёркивать нельзя)? Напоминаем, что надо не только привести пример, но и объяснить, почему меньшим количеством цифр обойтись нельзя.*

Ответ. Три. Решение. Так как 2016 делится на 9, сумма цифр получившегося после вычеркивания цифр числа также должна делиться на 9. У числа 20162016 сумма цифр равна 18. Вычёркивание одного или двух нулей нужного результата не даёт: числа 2162016, 2016216 и 216216 на 2016 не делятся. Значит, надо вычеркивать цифры, дающие в сумме 9. Так как сумма любых двух цифр числа 20162016 меньше 9, придётся вычеркнуть хотя бы три цифры. Три цифры вычеркнуть можно: 2016~~2~~0~~16~~ = 20160.

2. *Два велосипедиста ехали по шоссе, каждый со своей постоянной скоростью. Оказалось, что более быстрый из них проезжает 6 км на 5 минут быстрее, а за 20 минут проезжает на 4 км больше, чем медленный. Найдите произведение скоростей велосипедистов, выраженных в километрах в час.*

Ответ. 864. Решение. Пусть скорость медленного велосипедиста равна u км/ч, а быстрого — v км/ч. Тогда из условия имеем $\frac{6}{u}=\frac{6}{v}+\frac{1}{12}$ и $\frac{v}{3}=\frac{u}{3}+4$. Из первого уравнения имеем $uv = 72(v-u)$, из второго — $v-u = 12$, откуда и получаем ответ.

3. *В футбольном турнире, где каждая команда встречалась с каждой один раз, играли 16 команд. За победу давали три очка, за ничью — одно, за поражение — ноль. После окончания турнира выяснилось, что каждая команда выиграла хотя бы треть своих матчей и проиграла хотя бы треть своих матчей. Докажите, что какие-то две команды набрали поровну очков.*

Первое решение. Каждая команда сыграла в чемпионате 15 матчей. По условию она не меньше пяти из них выиграла и не меньше пяти проиграла, поэтому набрала не меньше 15 и не больше 30 очков. При этом 29 очков ни одна команда набрать не могла. В самом деле, пусть такая команда есть. Тогда она должна была хотя бы раз сыграть вничью. Но в этом случае у неё максимум 9 побед, и она набрала не более $3\cdot9+1 = 28$ очков, ибо любая замена победы ничьей уменьшает число очков. Таким образом, у нас 16 команд и 15 возможных сумм баллов: 15, …, 27, 28, 30, из чего и вытекает утверждение задачи.

Второе решение. Каждая команда сыграла в чемпионате 15 матчей. По условию она не меньше пяти из них выиграла и не меньше пяти проиграла, поэтому набрала не меньше 15 и не больше 30 очков. Тут 16 вариантов, и если никакие две команды не набрали поровну очков, то каждое количество очков от 15 до 30 набрала ровно одна команда, а всего они набрали $15+\ldots+30 = 360$ очков. Но 360 — это максимальное возможное общее число очков, которое получается, если все $16\cdot15/2 = 120$ матчей турнира закончились чьей-либо победой. Однако, не все числа от 15 до 30 делятся на 3, поэтому в турнире были и ничьи, а тогда общая сумма очков должна быть меньше 360 — противоречие.

4. *Диагонали параллелограмма ABCD пересекаются в точке O. Точка P такова, что DOCP — тоже параллелограмм (CD — его диагональ). Обозначим через Q точку пересечения BP и AC, а через R — точку пересечения DQ и CP. Докажите, что PC = CR.*

Решение. Заметим, что отрезки DP и BC параллельны и равны. Поэтому $BOPC$ — параллелограмм, откуда $QC = OC/2 = PD/2$. Таким образом, отрезок QC с концами на сторонах RD и RP треугольника DRP параллелен стороне DP этого треугольника и равен её половине. Значит, он является средней линией этого треугольника (иначе он вместе со средней линией образовывал бы параллелограмм, что невозможно, так как прямые RD и RP не параллельны). Следовательно, C — середина отрезка RP, что и требовалось доказать.

5. *Существуют ли такие натуральные числа m, n, k, что все три числа* m^2+n+k, n^2+k+m, k^2+m+n *являются квадратами натуральных чисел?*

Ответ. Нет. Решение. Допустим, утверждение задачи верно. Тогда $m^2+n+k \geq (m+1)^2$, откуда $n+k \geq 2m+1$. Аналогично, $m+k \geq 2n+1$, $n+m \geq 2k+1$. Складывая три полученных неравенства, получаем $2(n+m+k) \geq 2(n+m+k)+3$. Противоречие.