Первый тур дистанционного этапа XII олимпиады имени Леонарда Эйлера

Решения задач

1. *Саша, Андрей и Оля выбрали по натуральному числу. Каждый из них умножил числа, выбранные двумя другими ребятами, на свое число и вычел меньшее произведение из большего. У Саши получилось 1, а у Андрея 121. Сколько могло получиться у Оли? Приведите все возможные варианты и докажите, что других нет.* (Автор задачи — А. Кузнецов)

Ответ. 120. Решение. Пусть числа Саши, Андрея и Оли равны a, b, c соответственно. Тогда по условию $a\cdot|b-c| = 1$, $b\cdot|a-c| = 121$. Из первого равенства $a = 1$, и тогда из второго $b(c-1) = 121$. Значит, либо $b = 1$, $c = 122$ (что противоречит первому равенству), либо $b = 121$, $c = 2$ (аналогично), либо, наконец, $b = 11$, $c = 12$. Поэтому у Оли получится $c\cdot(b-a) = 12\cdot10 = 120$.

2. *На окружности отмечено 150 серых, 151 бурая и 152 малиновых точки таким образом, что никакие две одноцветные точки не стоят рядом. Докажите, что найдётся бурая точка, у которой оба соседа — малиновые.* (С. Берлов)

Решение. Рассмотрим лишь серые и малиновые точки. Поскольку малиновых точек больше, между каким-то двумя малиновыми нет серой. Но рядом одноцветные точки стоять не могут, поэтому между этими двумя малиновыми точками на окружности стоит ровно одна бурая. Она-то и удовлетворяет условию.

3. *Клетчатый прямоугольник 100×101 (100 строк, 101 столбец) разбит на полоски 1×5 так, что в каждом столбце содержится ровно k вертикальных полосок. Чему может быть равно k?* (Ф. Петров)

Ответ. 20. Первое решение. Покрасим клетки 1-го, 6-го, 11-го, ..., 101-го столбца в красный цвет, а клетки 2-го, 7-го, 12-го, ..., 97-го столбца — в синий цвет. Красных столбцов на 1 больше, чем синих, а красных клеток на 100 больше, чем синих. Поскольку в каждом столбце находится ровно k вертикальных полосок, красных вертикальных полосок ровно на k больше, чем синих, и красных клеток в них занято на $5k$ больше, чем синих. А в каждой горизонтальной полоске поровну красных и синих клеток (по одной). Поэтому общее количество красных клеток на $5k$ больше общего количества синих. Таким образом, $100 = 5k$, $k = 20$. Второе решение. Предположим, что $k < 20$. Тогда в каждом столбце ровно $n = 100-5k$ клеток принадлежат горизонтальным полоскам. Заметим, что тогда в первом столбце начинаются ровно n горизонтальных полосок, и клетки именно этих n полосок присутствуют в столбцах со второго по пятый. Значит, клеток других горизонтальных полосок в них уже нет. Следовательно, ровно n полосок начинаются в шестом столбце и занимают также столбцы с седьмого по десятый, и так далее. Таким образом, столбцы должны разбиваться на пятерки подряд идущих столбцов, что невозможно, ибо их количество 101 не делится на 5.

4. Внутри трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$), где $AD = 2BC$, взята точка F, для которой $AB = FB$. Точка M — середина отрезка FD. Докажите, что $CM \perp FA$. (Ф. Бахарев)

Первое решение. Пусть N — середина AF. Отрезок NM — средняя линия треугольника AFD, поэтому $NM \parallel AD \parallel BC$ и $NM = AD/2 = BC$. Следовательно, $NBCM$ — параллелограмм, и $BN \parallel CM$. С другой стороны, отрезок BN является медианой равнобедренного треугольника ABF, поэтому $BN \perp AF$. Таким образом, $CM \perp AF$, что и требовалось. Второе решение. Продолжим боковые стороны трапеции до пересечения в точке K. Из условия $AD = 2BC$ следует, что BC — средняя линия треугольника AKD. Поэтому $KC = CD$. Теперь CM — средняя линия треугольника KDF, откуда $CM \parallel KF$. С другой стороны, $BF = AB = BK$, поэтому треугольник AFK прямоугольный, где $KF \perp AF$. Таким образом, $CM \perp AF$, что и требовалось.

5. *Существуют ли 10000 последовательных семизначных чисел, которые можно разбить на 99 групп так, чтобы сумма всех чисел в каждой из групп была одной и той же?* (Д. Карпов)

Ответ. Нет. Решение. Заметим, что найдется группа A, содержащая не больше 101 числа, ибо $99\cdot102 > 10000$. С другой стороны, найдется группа B хотя бы из 102 чисел, ибо $99\cdot101 < 10\,000$. Пусть первое из 10000 данных нам чисел равно n. Тогда сумма S_A всех чисел из группы A не больше, чем $a = (n+9999)+(n+9999-1)+\ldots+(n+9999-100) = 101n+9999\cdot101-50\cdot101 = 101n+9949\cdot101$. Сумма же S_B всех чисел из группы B не меньше, чем $b = n+(n+1)+\ldots+(n+101)$, что равняется $102n+101\cdot51$. Значит, $S_B-S_A \geq b-a = n-9949\cdot101+51\cdot101 = n-9898\cdot101 = n-999698 > 0$, так как число 999698 — шестизначное, а число n — семизначное. Поэтому $S_B \neq S_A$, откуда и вытекает ответ.