Второй тур дистанционного этапа XVI олимпиады имени Леонарда Эйлера

Решения задач

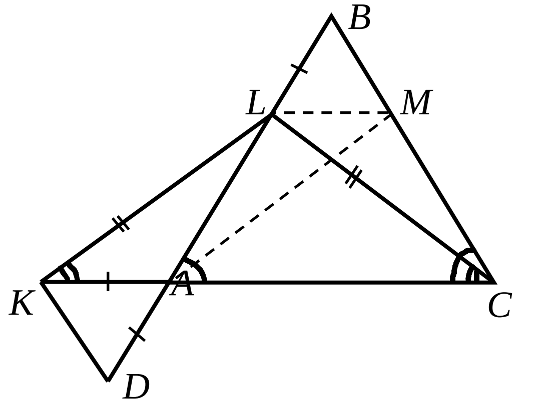
1. *За круглым столом сидят n человек: рыцарей, всегда говорящих правду, и лжецов, которые всегда лгут. Каждый из них знает про остальных, кто рыцарь, а кто — лжец. Журналист задал каждому из сидящих вопрос: «Кто ваш правый сосед, рыцарь или лжец?», и от каждого получил либо ответ «рыцарь», либо ответ «лжец». Журналисту было известно, что лжецов за столом ровно 8. Но все равно оказалось, что по полученным ответам невозможно точно установить, кто из сидящих — лжецы. Чему могло быть равно n?* (И. Богданов)

Ответ. 16. Решение. В рассадке людей за круглым столом чередуются группы идущих подряд лжецов и идущих подряд рыцарей. Ответ «лжец» на вопрос журналиста дают самые правые лжецы и самые правые рыцари в этих группах. Назовем давших ответ «лжец» *отмеченными*. Покрасим отмеченных в красный и синий цвета так, чтобы цвета чередовались. Затем каждого из неотмеченных покрасим в тот же цвет, в который покрашен ближайший отмеченный, сидящий правее него. В итоге все группы идущих подряд рыцарей окажутся покрашенными в один цвет, а все группы идущих подряд лжецов — в другой. Мы знаем, что лжецов 8, и единственный случай, когда мы не сможем точно установить, кто из сидящих — лжецы, а кто — рыцари, это случай, когда людей каждого цвета по 8. Такое возможно только при $n = 16$.

2. *У натурального числа стерли две последние цифры и полученное число прибавили к исходному. Могло ли в сумме получиться число $101^{50}–1$?* (И. Рубанов)

Ответ. Не могло. Решение. Пусть после стирания двух последних цифр натурального числа k получилось число n. Тогда $k = 100n+m$, где m — число, записанное двумя последними цифрами числа k, откуда $k+n = 101n+m$. Так как число m меньше 100, оно должно равняться остатку от деления суммы $n+k$ на 101. Но это невозможно, так как число $101^{50}–1$ при делении на 101 дает остаток 100.

3. *На продолжении основания AC равнобедренного треугольника ABC за вершину A выбрана точка K, а на боковой стороне AB — точка L так, что KL = LC. Оказалось, что KA = LB. Найдите угол ABC.* (И. Богданов)



Ответ. 60°. Первое решение. По теореме о внешнем угле треугольника $\angle KLA = \angle BAC – \angle LKA = \angle BCA – \angle LCA = \angle LCB$. Продолжим сторону BA за вершину A на отрезок $AD = KA = LB$. Тогда $LD = LA+AD = LA+LB = BA = BC$. Наконец, по условию $KL = LC$. Значит, треугольники KLD и LCB равны по двум сторонам и углу между ними, откуда $KD = LB = AD = KA$. Таким образом, треугольник ADK — равносторонний, откуда $\angle BAC = \angle DAK = 60°$, и равнобедренный треугольник ABC — тоже равносторонний, откуда и следует ответ.

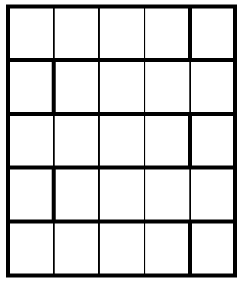
Второе решение. Достроим треугольник KLA до параллелограмма $KLMA$. Как и в первом решении, заметим, что углы KLA и LCB равны, поэтому $\angle MAL = \angle KLA = \angle LCB$. Тогда треугольники LBC и MBA равны по двум сторонам ($BC = BA$, $AM = KL = CL$) и углу между ними. Значит, $\angle LBC = \angle MBA$, то есть M лежит на BC. Но тогда треугольник BML равносторонний ($ML = AK = LB = MB$), и угол при вершине B равен 60°. Замечание. Похожее решение можно получить «обратным ходом», отметив на стороне BC точку M так, что $BL = BM$, и заметив, что $ML \parallel KA$ и $KL = LC = AM$. Отсюда *почти* следует, что $KLMA$ — параллелограмм, но он может оказаться ещё равнобокой трапецией, и этот случай надо отсечь (например, заметив, что углы LKA и MAC острые).

Третье решение. По условию $KL = LC$, $KA = LB$. Кроме того, как было показано в первом решении, $\angle KLA = \angle LCB$. Поэтому по «четвертому полупризнаку равенства треугольников» либо углы LBC и LAK (и треугольники LBC и LAK) равны, либо сумма этих углов равна 180°. Но LAK — внешний угол треугольника ABC, и потому $\angle LAK > \angle ABC = \angle LBC$. Поэтому $\angle LBC = 180° – \angle LAK = \angle BAC$, и треугольник ABC — равносторонний.

4. *Петя, Вася и Коля бежали по кольцевой дорожке с постоянными скоростями в одном направлении. Они стартовали одновременно и из одной точки. Петя впервые обогнал Васю на своем четвертом круге (то есть пробежав больше трех кругов, но еще не закончив четвертый), а Колю — на своем седьмом круге. Докажите, что Коля впервые обогнал Васю раньше, чем пробежал десять кругов.* (И. Рубанов)

Решение. Пусть Петя бежит со скоростью a, Вася — со скоростью b, Коля — со скоростью c. Если бы Петя догнал Колю, пробежав ровно шесть кругов, Коля к тому времени пробежал бы ровно пять кругов, и его скорость составляла бы 5/6 от скорости Пети. Поскольку на самом деле Петя догнал Колю позже, $c > 5a/6$. Если бы Петя догнал Васю, пробежав ровно четыре круга, Вася к тому времени пробежал бы ровно три круга, и его скорость составляла бы 3/4 от скорости Пети. Поскольку на самом деле Петя догнал Васю раньше, $b < 3a/4$. Поэтому $b/c < (3a/4)/(5a/6) = 9/10$, то есть $b < 9c/10$. Если бы b равнялось $9c/10$, Коля догнал бы Васю, пробежав ровно 10 кругов (а тот за это время пробежал бы 9 кругов). Поскольку на самом деле Вася бежит со скоростью, меньшей $9c/10$, Коля догонит его раньше, что и требовалось доказать.

5. *Вася отметил невидимыми чернилами одну из клеток таблицы размером 5х5 клеток. Разрешается выделить в таблице четыре идущих подряд по горизонтали или вертикали клетки и спросить у Васи, есть ли среди них отмеченная. Каждый следующий вопрос задается после ответа на предыдущий. За какое наименьшее количество таких вопросов можно наверняка определить отмеченную клетку?* (И. Рубанов)



Ответ. За 8 операций. Решение. Покажем, как найти отмеченную клетку за 8 операций. Первые пять четверок клеток выделим как показано на рисунке справа. Возможны два случая. 1) *Отмеченная клетка оказалась в одной из этих пяти четверок*. Проверим три вертикальные четверки, захватывая каждый раз по одной клетке из горизонтальной четверки с отмеченной клеткой. Если в одной из них окажется отмеченная клетка — мы ее нашли, если нет — отмечена клетка, оставшаяся непроверенной. 2) *Отмечена одна из пяти «одиночных» клеток на рисунке справа*. Тогда шестой и седьмой операциями проверим четыре нижние клетки самого левого и самого правого столбца. Если в одной из этих четверок окажется отмеченная клетка, она — одна из двух входящих в нее «одиночных» клеток. Тогда, проверив горизонтальной четверкой одну из этих двух клеток, мы за одну операцию находим отмеченную клетку. Если же ни в одной из этих четверок отмеченной клетки нет, отмечена клетка в правом верхнем углу. В обоих случаях мы использовали не больше восьми операций. Покажем, что 7 операций может не хватить. Пусть на первые пять запросов Вася ответил «нет». Тогда останется не меньше пяти «нетронутых» клеток, не вошедших ни в одну из первых пяти четверок. Шестой вопрос разбивает «нетронутые» клетки на два множества: затронутые этим вопросом и не затронутые. В каком-то из них не менее 3 клеток. После седьмого вопроса среди них окажутся либо две затронутые этим вопросом, либо две не затронутые им. Пусть отмечена одна из них. Тогда мы не сможем узнать, какая из них отмечена, так как при замене отметки в одной на отметку в другой ответы на все наши вопросы не меняются.