Третий тур дистанционного этапа XVI олимпиады имени Леонарда Эйлера

Решения задач

1. *Мотоциклист был в пути три часа (какое-то время он мог и стоять). Его средняя скорость в первые два часа равнялась 50 км/ч и в последние два часа — тоже 50 км/ч. Какое наибольшее расстояние он мог преодолеть?* (Фольклор)

Ответ. 200 км. Решение. Если мотоциклист первый и третий часы пути ехал со скоростью 100 км/ч, а второй час стоял, то он преодолел 200 км, а его средняя скорость как в первые так и в последние два часа пути равнялась 100/2 = 50 км/ч. Больше 200 км он проехать не мог, так как за первые два часа проехал 100 км, и за последний час — не более 100 км, так как 100 км он проехал за последние два часа.

Ответ с примером без оценки, как и ответ с оценкой без примера оцениваются *из 3 баллов*.

2. *Три числа таковы, что куб суммы любых двух из них равен сумме их кубов. Докажите, что среди этих чисел есть нуль.* (И. Рубанов)

Решение. Обозначим наши числа через x, y и z. Пусть среди них нет нуля. По условию $0 = (x^3+y^3)-(x+y)^3 = (x+y)(x^2-xy+y^2-(x+y)^2) = -3xy(x+y)$. Так как x и y — не нули, то $x+y = 0$, то есть $x = -y$. Аналогично доказывается, что $y = -z$ и $z = -x$. Но тогда $x = -y = -(-z) = z$ и $-z = z$, откуда $z = 0$.

3. *Вася хочет несколько раз выписать в строчку число 12345 так, чтобы получившееся многозначное число делилось на 41. Какое наименьшее число раз ему нужно это сделать?* (А. Голованов)

Ответ. 41. Решение. Представим искомое число в виде

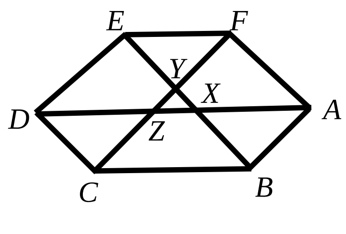
$$N = 12345+12345\cdot10^5+12345\cdot10^{10}+\ldots+12345\cdot10^{5(k-1)},$$

где k — количество экземпляров числа 12345, выписанных Васей. Число $10^{5-}1 = 99999$ делится на 41. Значит, при любом натуральном s делится на 41 число $10^{5s}-1 = 99\ldots99$, записываемое $5s$ девятками. Поэтому делится на 41 и число $N-12345k = 12345((10^5-1)+(10^{10}-1)+\ldots+(10^{5(k-1)}-1))$. Значит, чтобы N делилось на 41, необходимо и достаточно, чтобы на 41 делилось число $12345k$. Поскольку 41 простое, а 12345 на 41 не делится, наименьшее подходящее k равно 41.

4. *В классе каждый ученик дружит ровно с шестью другими, и у любых двух учеников есть ровно два общих друга. Сколько учеников в этом классе?* (Факт из теории графов)

Ответ. 16. Решение. Пусть A — ученик, B_1, …, B_6 — его друзья, а X — некоторый ученик, отличный от A. По условию у X должно быть ровно два друга среди B_1, …, B_6. С другой стороны, у любых двух друзей B_i и B_j ученика A есть единственный общий друг X, отличный от A. Поэтому учеников, отличных от A, в классе столько же, сколько различных пар, составленных из друзей A, то есть $6\cdot5/2 = 15$, а всего учеников $15+1 = 16$.

5. *Шестиугольник, все углы которого меньше 180 градусов, таков, что каждый треугольник, образованный тремя идущими подряд его вершинами, имеет площадь 1. Докажите, что площадь этого шестиугольника не меньше 6.* (И. Рубанов)



Решение. Так как площади треугольников ABC и BCD по условию равны, то равны и высоты, опущенные на их общее основание BC. Поскольку все углы шестиугольника меньше 180 градусов, вершины A и D лежат с одной стороны от прямой BC. Поэтому прямые BC и AD параллельны. Аналогично, $EF \parallel AD$, $CD \parallel BE \parallel AF$, $AB \parallel CF \parallel DE$.

Пусть диагонали AD и BE пересекаются в точке X, диагонали BE и CF — в точке Y, диагонали CF и AD — в точке Z. С точностью до выбора обозначений можно считать, что точка X принадлежит трапеции $ABCF$ (см. рисунок). Тогда наш шестиугольник можно разбить на параллелограммы $ABCZ$, $AFEX$, $EDCY$ и треугольник XYZ (который может выродиться в точку). Площадь каждого из трех перечисленных параллелограммов равна 2, так как половину каждого из них составляет один из треугольников, площадь которого по условию равна 1 (например, для параллелограмма $ABCZ$ это треугольник ABC). Площадь шестиугольника не меньше суммы площадей этих параллелограммов, откуда и вытекает утверждение задачи.